TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 171-Fevereiro-1947

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMÉRCIO, 56, 3.º
LISBOA

SOCIEDADE INDUSTRIAL METALURGICA

Responsabilidade Limitada
(REGISTADO)

SERRALHARIAS,
CALDEIRARIA,
FERRARIA,
FUNDIÇÕES

ESCRITÓRIO
Rua de S. Tiago, 13
LISBOA
Telefone 26572

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de todas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia "CIMENTO TEJO"

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
171
Fevereiro—1947

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 70144 (linha 50)

DIRECTOR
FERNANDO MANZANARES ABECASIS

ADMINISTRADOR
FERNANDO JÁCOME DE CASTRO

BIBLIOTECÁRIO
JOSÉ TELES

SECRETÁRIO
HENRIQUE ESTÁCIO MARQUES

REDACTOR
JOSÉ QUINTINO ROGADO

NÚMERO AVULSO 7$50

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	21$00	40$00	75$00
Colónias Portuguesas e Estrangeiro	—	45$00	80$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — D. G. S. H. — Obras do Rio Lis — Execução de aterros.

		Págs.
Notas histórico-pedagógicas sobre o Instituto Superior Técnico	Dr. Alfredo Bensaude	159
Transporte de líquidos	Eng. Luís A. de Almeida Alves	165
Resistência de escorregamento de terrenos arenosos e argilosos	Dr. Ing. Armin Malkwitz	183
Prospecção mineira e zonas geotectónicas na metalogenese ibérica	Dr. André Schneider	199
A física e a engenharia civil	Eng.º Manuel Rocha	219
Normalização do sinal da potência reactiva		227
Biblioteca		231

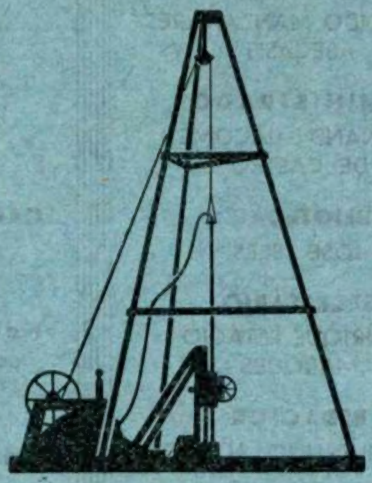
OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas
Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico
Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo
Rebocos comprimidos por «cement gun»
Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no país e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º—LISBOA Tel. 2 8685

CARROS INDUSTRIAIS

MOTORES MARÍTIMOS

Douglas

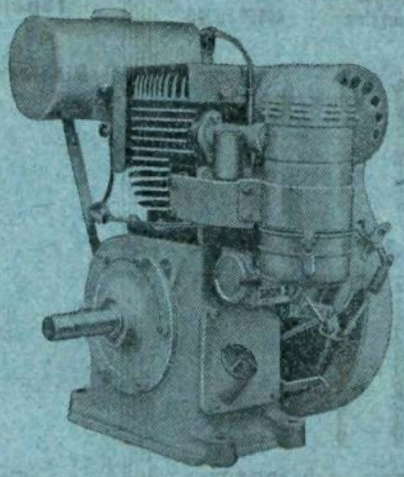
GRUPOS GERADORES

MOTORES INDUSTRIAIS A GASOLINA E GASOLINA/PETRÓLEO

Série 1 cilindro

B.H.P.	R.P.M.
2 1/2	1800
4 1/2-5	1800
6	1800
7	1800

Em Armazém para entrega imediata



REPRESENTANTES EXCLUSIVOS PARA PORTUGAL

H. M. F. HATHERLY, L.DA—Rua do Comércio, 8—Tel. 22001

TÉCNICA

FERNANDO MANZANARES ABECASIS

DIRECTOR

ANO XXII - N.º 171 FEVEREIRO 1947

NOTAS HISTÓRICO-PEDAGÓGICAS SOBRE O INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

POR ALFREDO BENSAUDE

Organizador do mesmo Instituto e seu Director desde 1911 a 1920

(Continuação)

C. D. 37

PROCESSOS PEDAGÓGICOS

Desenvolvimento da vontade e do poder de assimilação. Disciplina

Da rápida análise das principais características do nosso aluno, tal como se apresenta geralmente à matrícula no Instituto, conclui-se que, para o aproveitar, é, pelo menos, indispensável que a escola exerça nele uma influência educativa, a fim de lhe desenvolver duas qualidades essenciais: a persistência no trabalho e a faculdade de assimilação.

Estas qualidades adquirem-se simultâneamente, pois é evidente que, se o aluno estudar com vontade de aprender, assimilará também o que estuda, se não for de todo privado de faculdades.

Se não se realizassem tais objectivos, a acção da escola limitar-se-ia muitas vezes a diplomar alunos que não teriam condições para prosperar honestamente na vida e que viriam, mais tarde ou mais cedo, a transformar-se em parasitas da colectividade, contribuindo para a sua degradação moral.

O primeiro passo para evitar tal resultado consiste em eliminar, principalmente no primeiro ano de estudos, todos os que não possuem um mínimo de vontade, que se admite existir, em estado mais ou menos rudimentar, no momento da matrícula, e cujo desenvolvimento se procura depois promover por uma sucessão graduada de trabalhos, cada vez mais complexos e demorados, como são, por exemplo, os exercícios de desenho dos dois primeiros anos do Instituto.

A faculdade de assimilação desenvolve-se igualmente por provas frequentes em que o aluno tenha de aplicar as matérias que lhe ensinam nas aulas. Antes de se poder aplicar racionalmente o que se aprendeu, é preciso, evidentemente, tê-lo assimilado.

Eis, em resumo, o essencial de toda a organização do Instituto, destinada a *educar* os alunos:

1.º Necessidade absoluta de produzir metòdicamente muito trabalho material para desenvolver a vontade;

2.º Necessidade absoluta de reter o que se aprendeu, para o saber aplicar nos trabalhos práticos que acompanham o estudo em todos os cursos, até à saída da escola.

* * *

Um outro elemento educativo, que reputo de grande importância, é a liberdade de frequência, como se tem aplicado no Instituto.

Nas escolas em que ela foi introduzida nos seus cursos, têm sido estes designados por *cursos livres,* o que não significa o que se deseja exprimir.

As aulas de qualquer cadeira ordinária não podem constituir um *curso livre,* visto o seu estudo ser *obrigatório* para o aluno que deseje diplomar-se na especialidade a que a cadeira pertence.

Curso livre é um curso facultativo, que se não destina a uma categoria especial de alunos; assim, por exemplo, o professor de matemáticas tem regido no Instituto um curso livre de análise superior que termina sem nenhuma espécie de exame e se destina a quaisquer estudiosos, mesmo alheios ao Instituto, que, por curiosidade científica, ou para seu proveito, desejam tomar conhecimento da matéria.

A frequência sem fiscalização, introduzida em várias escolas depois do advento da República, tem sido diversamente apreciada.

Ao passo que no Instituto é considerada um elemento de progresso, nas Faculdades de Ciências e de Letras da Universidade de Lisboa, pelo menos, parece predominar a opinião contrária, manifestando alguns dos seus professores o desejo de a ver abolida, por a julgarem inadaptável ao nosso país.

Esta grande discordância resulta do facto de a liberdade de frequência ter sido aplicada de modos diversos nos estabelecimentos onde vigora, conduzindo a diversidade da aplicação a resultados opostos.

A liberdade de frequência é, como todas as liberdades, excelente apenas quando razoàvelmente regulamentada. Para que possa aplicar-se com vantagem numa determinada escola, é naturalmente necessário contar-se com ela na sua organização.

Conservando-se, por exemplo, o tradicional exame de fim de ano em cada cadeira como principal elemento de selecção, o que conduz o aluno a estudar de preferência à última hora (porque é esse o meio de conseguir a aprovação com menor esforço), agravam-se as deficiências do sistema: o aluno continuará a estudar à última hora e, além disso, abandonará as aulas onde já lhe não marcam faltas, só aparecendo na escola para prestar as provas de exame. Citam-se exames felizes feitos nestas condições (até por alunos que nem residiram nas sedes das escolas durante o ano lectivo!) como argumento contra a frequência livre; na realidade esses exames felizes só demonstram que as exigências dos examinadores são pequeníssimas, pois aceitam como provas suficientes, a recitação de ciência livresca aprendida de véspera.

Se tão pouco bastasse para produzir gente instruída, ficaria até provada a inutilidade das escolas, que, nesse caso, poderiam ser substituídas por simples comissões de exame.

A liberdade de frequência às aulas teóricas, conforme é regulamentada no Instituto, não dispensa de modo algum o aluno de as frequentar. Para achar a fórmula que combina as duas condições aparentemente antinómicas: a liberdade de frequência com uma grande soma de trabalho escolar, foi necessário adaptar às nossas condições o que há muitos anos se faz nos países onde o sistema dá bons resultados. Assim se evitaram os inconvenientes a que, noutras escolas, conduziu a liberdade de frequência sem a regulamentação conveniente.

Vejamos pois como ela funciona no Instituto:

As bases regulamentares (*Diário do Governo* de 14 de Julho de 1911) dispõem que «não haverá registo algum das faltas nas aulas orais». Fica assim consignada a liberdade

que tem o aluno de faltar a essas aulas, quando assim o entender, porque a escola quer que seja ele, quanto possível, o juiz dos seus actos. Mas noutro artigo fica estatuído que «haverá anualmente em cada cadeira ordinária, tanto na parte prática como na parte teórica, três exames de freqnência obrigatórios»; e ainda outro artigo manda que as provas teóricas se efectuem depois das práticas.

Nas cadeiras de matemática, por exemplo, a parte prática consiste na aplicação a casos concretos dos teoremas expostos nas lições orais. O tempo empregado nesses exercícios é, mais ou menos, seis horas por cada três horas de lição oral. O aluno pode, evidentemente, faltar às três horas de aula teórica, mas não pode deixar de conhecer a matéria que lá se ensinou, para aplicá-la nos problemas das provas práticas obrigatórias. Pode faltar; mas não falta, se não quiser perder o ano; não falta, porque nisso não tem vantagem alguma, antes pelo contrário, pois é mais fácil e mais rápido tomar conhecimento da matéria exposta na aula pelo professor, do que estudá-la pelo livro. Só quando estas condições se invertem, isto é, quando o ensino do professor é deficiente, ou este se limita a passar lições a dedo, ou a ler um compêndio impresso ou manuscrito (sebenta), é que o aluno dá naturalmente preferência ao estudo particular, renunciando mais ou menos completamente à aula, porque assim tem a vantagem de não perder o seu tempo.

Dum modo geral pode pois dizer-se: *o aluno que tem de dar provas práticas obrigatórias nas quais se apliquem as matérias ensinadas nas aulas teóricas, só faltará a estas, quando elas forem mal regidas.*

Nas cadeiras de aplicação, a parte prática consiste na resolução de problemas técnicos, que exigem quase todos a execução de desenhos e cálculos que representam um trabalho material considerável.

Como os trabalhos gráficos se fazem na escola para excluir o auxílio de estranhos, e o aluno não é admitido a exame teórico parcial ou anual sem a sua entrega, compreende-se que a liberdade de frequência não dispense a sua presença na escola por muito mais tempo além do que lhe absorvem as aulas teóricas.

Uma disposição das bases regulamentares determina que os alunos que tenham alcançado uma certa média nos exames parciais de qualquer cadeira são dispensados do respectivo exame final e consideram-se aprovados. Entre os aprovados por médias e os reprovados, ficam aqueles alunos cujas notas não conferem passagem nem implicam reprovação; só estes são admitidos a exames finais das várias cadeiras.

A prática mostra que a esses exames finais de cadeira só se apresenta um número limitado de alunos, que não satisfizeram completamente, no correr do ano, aos exames parciais, mas que, no entanto, produziram uma soma de trabalho considerável, sem o que não seriam admitidos. Esta disposição elimina automàticamente os espertos preguiçosos, que estudam só no fim do ano e constituem o elemento desmoralizador das escolas.

Pela liberdade de frequência, combinada com as provas práticas obrigatórias, obtêm-se pois os seguintes resultados:

1.º Combate-se a tendência tradicional dos alunos para estudar apenas à última hora; até os menos conscienciosos se preparam muitas vezes no ano para os exames das diferentes cadeiras que frequentam, consistindo essa preparação em sucessivos trabalhos, quase sempre demorados.

2.º Consegue-se, graças aos muitos exercícios de aplicação, que o aluno assimile os assuntos ensinados nas aulas teóricas. Os numerosos trabalhos gráficos realizados nesses exercícios são os que anualmente se expõem ao público na ocasião da abertura do Instituto.

3.º Consegue-se ainda eliminar automàticamente aqueles alunos que cumpririam talvez de modo medíocre os seus deveres escolares, se, em vez da vontade de que carecem, tivessem o *medo* da falta marcada pelo contínuo. Esses retiram-se em grande parte, logo no primeiro ano. Como ninguém os força a estudar, só trabalham os enérgicos e conscienciosos, únicos de quem se podem fazer homens úteis.

No Instituto, como em toda a parte onde se aplica um regime igual ou semelhante, é o primeiro ano o que o aluno considera mais difícil de vencer; mas a dificuldade está mais na falta do hábito de se governar por si, do que nas exigências escolares. Vindo da escola secundária, habituado a uma estreita fiscalização dos seus actos, hesita e descuida-se, porque lhe falta quem o force a cumprir os seus deveres.

Nas escolas superiores alemãs, por exemplo, é frequente a perda mais ou menos completa de um ou dois semestres, antes que o aluno adquira a autonomia necessária para se dirigir a si próprio; mas o sacrifício é bem compensado. Depois, vem o remorso de ter perdido inùtilmente o tempo, remorso que acorda a vontade a quem a tiver; e o aluno entra na fase da auto-educação. Exactamente o mesmo se observa no Instituto; no primeiro ano o número de baixas é muito grande; muitos abandonam os estudos; outros insistem em repeti-lo, no todo ou em parte, e as dificuldades que lhes pareciam a princípio insuperáveis, vão sendo vencidas à medida que o regime da escola lhes desenvolve o hábito de empregar um esforço moderado, mas contínuo, para atingirem o fim desejado.

Adquirido o hábito do trabalho regular e sereno, cresce naturalmente o interesse do aluno pelos assuntos de que se ocupa, e a carta de curso deixa de ser o seu anseio exclusivo: estuda para saber. Desde que o aluno atingiu a fase inevitável do interesse pelos trabalhos escolares, desponta mais fàcilmente a natural aspiração de adquirir qualidades intelectuais e morais, com que possa conquistar dignamente a subsistência. O estudo deu-lhe o interesse pela sua profissão e desenvolveu-lhe ambições sadias.

A experiência mostra que, para a grande maioria dos alunos dos cursos especiais, principalmente aqueles que frequentaram o Instituto desde o primeiro ano, a obrigatoriedade da frequência dos trabalhos práticos seria até dispensável. Estes pedem às vezes que se lhes forneçam ainda outros meios de instrução, além dos que a escola lhes faculta; longe, pois, de fugirem ao trabalho, querem que lho aumentem.

Compreende-se que o nosso regime escolar acorde nos melhores alunos certa relutância pelas situações oficiais, em que a iniciativa pessoal, que o regime lhes desenvolve, não tem grande aplicação e em que a competência não é devidamente apreciada, porque tanto se paga ao que sabe como ao que não sabe. Tais situações são principalmente vantajosas para os menos competentes, que, por isso mesmo, as procuram com mais frequência.

No que respeita à educação da vontade, a experiência do Instituto prova mais uma vez que, para dotar a mocidade com o hábito de *querer*, são inúteis os sermões de moral; a maneira de o conseguir, é, em primeiro lugar, *acordar a curiosidade e o interesse do aluno*, que constituem os estímulos mais eficazes de todo o ensino; e depois colocá-lo em condições tais, que a aquisição e o desenvolvimento de uma vontade serena e persistente, por meio de trabalhos metódicos e graduados, seja o único processo que conduza aos resultados desejados.

Paralelamente com a vontade disciplinada, vão aparecendo outras qualidades morais, igualmente preciosas, que vêm completar harmònicamente as intelectuais, mais vulgares e, às vezes, superiores, nos nossos rapazes.

As más influências ambientes, que originaram as suas principais deficiências, continuam a actuar sobre o aluno, neutralizando mais ou menos os efeitos salutares do regime, mesmo durante a frequência da escola, que não o pode isolar completamente. Daí a vantagem de organizar ao menos os horários de modo que este passe o dia inteiro ocupado, dentro do edifício do Instituto, em trabalhos variados, a fim de o subtrair o mais possível a tais influências. Seria até por isso conveniente que o aluno ali pudesse tomar as suas refeições.

Está fora de todas as possibilidades eliminar completamente os efeitos de más influências contra as quais a escola tem de lutar. A acção do Instituto sobre os seus alunos,

durante estes anos mais próximos, não poderá ir além da que exerce uma vacina preventiva, que, se não dá sempre a imunidade completa, aumenta pelo menos a resistência ao contágio. Depois, no decorrer do tempo, à medida que for crescendo o número de ex-alunos bem orientados, que vão entrando na vida prática, muitos se tornarão propagandistas pelo exemplo, alargando-se então a influência da escola para além dos muros do seu edifício.

O regime adoptado no Instituto é susceptível de ser aplicado com vantagem em *todas* as escolas superiores. Em parte alguma poderá dar melhores resultados do que no nosso país, onde a falta de vontade é uma doença moral frequente, que esteriliza muitos homens inteligentes.

Muitas, se não todas as nossas escolas superiores, têm adoptado mais ou menos completamente a organização do Instituto, num ou noutro ponto. Julgamos que lhes seria igualmente vantajosa a nossa orientação pedagógica.

* * *

Exercendo uma boa influência nos estudantes, o regime da frequência livre também actua favoràvelmente sobre os professores e promove a disciplina escolar.

Como vimos, as aulas são frequentadas com regularidade, apenas quando o ensino é ministrado com proficiência, porque, nesse caso, o aluno realiza uma economia de tempo e de esforço. No caso contrário, recorre ao estudo pelos compêndios e falta mais ou menos completamente às aulas. Basta pois saber-se qual é a afluência de alunos a qualquer aula e conhecer a qualidade e quantidade dos trabalhos práticos que a acompanham, para avaliar se ela funciona normalmente.

Há quem reprove o sistema, por julgar que ele inverte as naturais relações de professor a aluno, arvorando este em juiz do primeiro; mas o aluno, que, com efeito, não terá competência para julgar o professor, decide apenas se lhe é mais fácil tomar conhecimento dos assuntos tratados na sua cadeira pela frequência da aula, ou pelo estudo particular; e ninguém melhor do que ele está em condições de avaliar qual dos processos lhe exige menor esforço, sendo natural que escolha o mais fácil. Se os alunos abandonam a aula, a situação do professor pode ser insustentável; os alunos concluem naturalmente que ele não ensina bem. Mas isto mesmo não deixariam de descobrir, se o regime escolar fosse de frequência obrigatória, isto é, de protecção aos maus professores.

Forçado a assistir a uma aula onde, segundo a sua experiência, o ensino lhe não é proveitoso, sòmente para evitar que lhe marquem faltas, o aluno mais fàcilmente esquece a natural deferência que deve aos seus superiores, do que permitindo-se-lhe que não assista.

O regime de liberdade, quando o professor possua as condições para bem cumprir a sua missão e, entre estas, avultam o conhecimento da sua ciência, a simpatia pela mocidade e a consciência das suas responsabilidades como mestre, não só contribui para conservar o ensino a um nível elevado, como favorece também a disciplina.

Os alunos trabalham, porque querem; e o papel do professor consiste sobretudo em dirigi-los de modo que os esforços deles os conduzam ao maior aproveitamento possível. Em condições tais desenvolvem-se normalmente relações entre mestres e discípulos, que não podem existir quando o medo do castigo, a marcação de faltas, é um dos maiores estímulos para o trabalho, e o professor um ser olímpico que manda castigar periòdicamente uns tantos alunos, exercendo o seu mester um pouco como o domador de feras, a quem estas detestam naturalmente e agatanham logo que para tal se apresenta ocasião.

Os processos compulsórios, que já são maus para crianças de cinco ou seis anos, são péssimos e deprimentes para homens feitos. No regime de liberdade, a escola é compa-

rável a uma grande família em que os mais experientes conduzem os inexperientes, baseando-se a subordinação voluntária destes na consideração que a toda a criatura normal devem merecer o saber e a virtude. Só para os alunos sem consciência moral é que a força entra em defesa da disciplina; mas estes são felizmente raros.

O sistema só pode ser antipático aos mestres a quem faltem alguns dos requisitos para o exercício das suas funções e, por isso, têm de valer-se da autoridade que lhes confere a posição, para imporem, pelo terror, um simulacro de respeito feito de aversão mascarada pela hipocrisia. Ora, a existência de tais professores, que assim têm de salvaguardar a disciplina, além de outros graves inconvenientes, exerce uma acção nociva sobre o carácter da mocidade, conduzindo-a fàcilmente ao servilismo ou à revolta.

(Continua)

TRANSPORTE DE LÍQUIDOS

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES
Assistente do I. S. T.

C. D. 532

Introdução

A maior parte das reacções químicas efectua-se em fase líquida ou em fase gasosa; por isso, o transporte de líquidos e de gases tem, para o Engenheiro Químico, uma importância excepcional e obriga a ter um conhecimento razoável da mecânica dos fluidos.

Este assunto não tem, todavia, no curso de química do Instituto Superior Técnico um desenvolvimento suficiente, porque se reduz a uma descrição sumária de canalizações, bombas e ventiladores em Química Tecnológica e a algumas expressões de perdas de carga em Metalurgia.

Por essa razão, dentro da orientação geral, definida a propósito do transporte mecânico de sólidos, vamos escrever um pequeno artigo sobre mecânica dos fluidos, limitando-nos, nas aplicações, ao caso dos líquidos e reservando a mecânica dos gases para outro artigo.

Não é nosso propósito escrever qualquer coisa de novo, para quem já sabe hidráulica, mas sim, fazer uma exposição simples (1) e curta que permita introduzir os químicos na leitura de livros sobre mecânica dos líquidos, sem grande dificuldade. Por uma questão de uniformidade, conservaremos, sempre que possível, as notações do actual curso de hidráulica do I. S. T., mas não empregaremos, em geral, os seus raciocínios, porque preferimos aplicar noções matemáticas já conhecidas que tornam a exposição mais rápida e menos pesada.

Por isso, o estudo que vamos fazer só exige uma certa prática de Matemáticas Gerais, de Cálculo Diferencial e Integral, de Mecânica Racional e de Funções Analíticas, para certos casos.

(1) Entendendo-se por exposição simples a que aplica, ordenadamente, conhecimentos já adquiridos, mesmo que esses conhecimentos, em si, possam não ser simples.

I PARTE

GENERALIDADES. MOVIMENTO DE LÍQUIDOS POR ACÇÃO DA GRAVIDADE

CAPÍTULO I

Equações do movimento de um fluido qualquer

a) *Fluidos compressíveis e incompressíveis*

Sabe-se, da Geometria das Massas, que, considerando um corpo como contínuo, a sua densidade ρ se define pela derivada da massa em ordem ao volume:

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Utilizando as designações usuais, o valor de ρ, assim definido, representa uma massa específica e as suas dimensões são $[ML^{-3}]$.

Considerando um fluido qualquer, o valor de ρ, em cada ponto, é função das coordenadas desse ponto, da temperatura e da pressão; pode acontecer, porém, que ρ seja constante em relação à pressão. Este último caso refere-se aos fluidos chamados incompressíveis (líquidos) e o caso mais geral corresponde aos fluidos compressíveis (gases).

Estudar-se-ão, em primeiro lugar, os fluidos compressíveis e considerar-se-ão os incompressíveis como casos particulares.

b) *Equação da continuidade*

Consideremos um fluido em movimento, a temperatura constante, e isolemos, no instante t_0, uma dada massa que ocupa o volume v_0, sendo a massa específica ρ_0 (fig. 1).

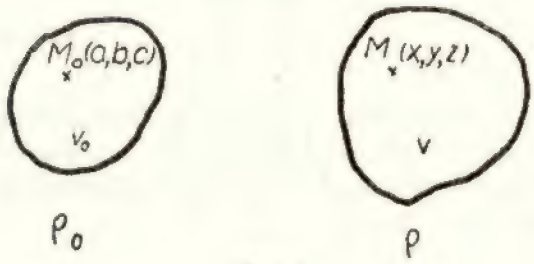


Fig. 1

No instante t, se não houver dispersão, a mesma massa ocupará um volume v e, portanto, a massa específica variará e tomará o valor de ρ.

Como a massa se mantém, será

$$\int_{v_0} \rho_0 \, dv_0 = \int_v \rho \, dv \,, \quad \text{ou}$$

$$\iiint_{v_0} \rho_0 \, da \, db \, dc = \iiint_v \rho \, dx \, dy \, dz$$

Se, no integral do segundo membro se fizer a mudança de variável x, y, z (a, b, c), ficará

$$\iiint_v \rho \, dx \, dy \, dz = \iiint_{v_0} \rho \, I \, da \, db \, dc \,(^1) \,,$$

em que

$$I = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

Será, portanto,

$$\iiint_{v_0} \rho_0 \, da \, db \, dc = \iiint_{v_0} \rho \, I \, da \, db \, dc$$

Como esta igualdade terá de ser verdadeira, qualquer que seja v_0, as funções integradas devem ser iguais; logo

$$\rho_0 = \rho I$$

(1) Cálculo Integral = Mudança de variáveis nos integrais múltiplos.

que é a primeira expressão da equação da continuidade que não se usa por não ser cómoda. Para se tornar aplicável, transforma-se a equação achada, derivando-a em ordem ao tempo:

$$0 = \frac{d\rho}{dt} I + \rho \frac{dI}{dt}$$

Pela regra de derivação de determinantes (1), o valor de $\frac{dI}{dt}$ é:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial (u, y, z)}{\partial (a, b, c)} + \frac{\partial (x, v, z)}{\partial (a, b, c)} + \frac{\partial (x, y, w)}{\partial (a, b, c)};$$

em que

$$u = \frac{dx}{dt}, \; v = \frac{dy}{dt}, \; w = \frac{dz}{dt},$$

ou sejam as componentes da velocidade V de um ponto do fluido de coordenadas (x, y, z).

Pelas propriedades dos determinantes, conclui-se que (2):

$$\frac{\partial (u, y, z)}{\partial (a, b, c)} = I \frac{\partial u}{\partial x}; \; \frac{\partial (x, v, z)}{\partial (a, b, c)} = I \frac{\partial v}{dy};$$

$$\frac{\partial (x, y, w)}{\partial (a, b, c)} = I \frac{\partial w}{\partial z}$$

Portanto,

$$\frac{dI}{dt} = I \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = I \operatorname{div} V \,(^3)$$

Ter-se-á, pois

$$I \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} V \right) = 0$$

Como $I \lessgtr 0$ (4), a equação da continuidade será, finalmente,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} V = 0$$

(1) Cálculo diferencial — Derivação de determinantes.

(2) Matemáticas Gerais — Determinantes.

(3) Não se efectuaram todas as transformações por serem longas e inúteis.

(4) Se I fosse nulo, x, y e z não eram independentes. Ver Cálculo diferencial.

Se o fluido for incompressível, a massa específica é constante e, portanto

$$\operatorname{div} V = 0$$

c) *Equações indefinidas da Hidrodinâmica* (1)

Estudemos, agora, as forças que actuam sobre a massa que se isolou (fig. 2).

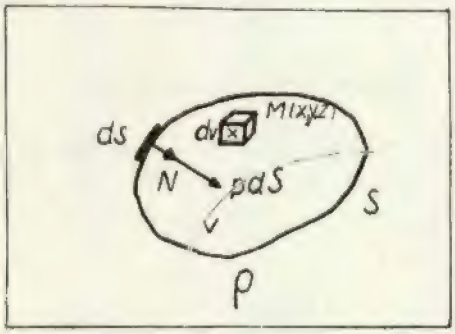


Fig. 2

Essas forças são as que actuam sobre a massa (forças mássicas), as que actuam sobre a superfície S e as de atrito.

1) *Forças mássicas*

São as forças aplicadas e as forças de inércia.

Representando por F a resultante das forças aplicadas por unidade de massa e por M'' a aceleração do ponto M, a força aplicada à massa $\rho\, dv$ e a força de inércia desta mesma massa serão, respectivamente, $F \rho\, dv$ e $-M'' \rho\, dv$.

A resultante das forças mássicas aplicadas ao volume v será, portanto,

$$F_m = \int_v (F - M'')\, \rho\, dv$$

2) *Forças de pressão*

Representando, por p, a pressão (força por unidade de superfície, de dimensões $[L^{-1}MT^{-2}]$), e por dS a área elementar da superfície S que limita o volume v, a força de pressão sobre a superfície dS tem a grandeza p dS e é dirigida segundo a normal interior. Sendo N o vector unitário da normal interior, a força de pressão, total, será:

$$F_p = \int_S (p\, N)\, dS$$

3) *Forças de atrito*

I — *Definição de viscosidade*

As forças de atrito, nos fluidos, são devidas à viscosidade a qual dá origem a uma resistência de escorregamento quando duas superfícies contíguas se deslocam com velocidades diferentes.

Essa força de atrito é directamente proporcional à área das superfícies em contacto e à diferença das grandezas das velocidades e inversamente proporcional à distância entre as duas superfícies (fig. 3).

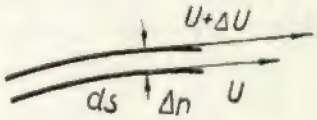


Fig. 3

$$F_a = \mu\, dS \frac{\Delta U}{\Delta n}, \text{ sendo } U = \operatorname{mod} V$$

Se as superfícies forem infinitamente próximas, será

$$d F_a = \mu\, dS \frac{dU}{dn}$$

O factor de proporcionalidade μ denomina-se coeficiente de viscosidade.

II — *Coeficiente de viscosidade*

Da expressão anterior, conclui-se que

$$\mu = \frac{d F_a}{dS \dfrac{dU}{dn}} \left[\frac{L M T^{-2}}{L^2 . \dfrac{L T^{-1}}{L}} \right] = \frac{d F_a}{dS \dfrac{dU}{dn}} [L^{-1} M T^{-1}]$$

A unidade C. G. S. de μ é o poise (1): Esta unidade é muito grande e, portanto, os va-

(1) Quem não estiver muito familiarizado com o cálculo pode limitar-se a utilizar os resultados achados.

(1) Nome derivado de Poiseuille.

lores de μ expressos em poises são muito pequenos; por isso, as tabelas, em geral, dão μ em centipoises, embora nas fórmulas se tenha de aplicar μ em poises (1).

Os valores de μ são determinados com viscosímetros e dados em tabelas (2).

Quando não houver possibilidade de encontrar tabelas com os valores de μ que se pretendem, ter-se-á de fazer a sua determinação. Como os viscosímetros que dão μ, directamente, são aparelhos muito delicados (3), usam-se, para os líquidos, aparelhos standard, já conhecidos da Química Geral e Aplicada e que têm os nomes de viscosímetros de Engler, Saybolt e Redwood.

As determinações feitas nestes viscosímetros permitem determinar o valor de μ, mediante fórmulas simples.

1 — *Viscosímetro de Engler*

Sendo t o número de segundos de escoamento de 200 cc de líquido, tem-se:

$$\frac{\mu}{\rho} = 0{,}147\,t - \frac{374}{t} \text{ (4)} \quad (\mu \text{ em centipoises e } \rho \text{ em gr cm}^{-3})$$

(1) Em geral, há sempre vantagem em usar μ em unidades C. G. S., ou seja em $[\text{cm}^{-1}\,\text{gr seg}^{-1}]$. No sistema métrico, as dimensões de μ serão $\left[\text{m}^{-1}\,\frac{\text{kg}}{\text{m seg}^{-2}}\,\text{seg}^{-1}\right] = [\text{m}^{-2}\,\text{kg seg}]$ e, portanto, a unidade métrica vale $9{,}8 \times 10^5$ poises. Em unidades inglesas, exprime-se L em pés, M em libras e T em segundos e o valor de μ, assim achado, vale 1.488 poises.

No entanto, mesmo as tabelas inglesas e americanas dão μ em centipoises ou poises.

(2) Por exemplo: «Elements of Chemical Engineering», de Badger and Mc Cabe, 2.ª edição, pág. 632 e 633

«Physico-Chemical Methods», de Joseph Reilly, 4.ª edição, I volume, pág. 549.

«Handbook of Chemistry», de Norbert Lange, 5.ª edição, pág. 1583 a 1595.

«Chemical Engineers'Handbook», de J. H. Perry e W. S. Calcott, 1.ª edição, pág. 674 a 684,

(3) A sua descrição pode ver-se no livro já citado «Physico-Chemical Methods», pág. 542 a 555.

(4) A relação $\frac{\mu}{\rho} = \nu \left[\frac{\text{L}^{-1}\,\text{M}\,\text{T}^{-1}}{\text{M}\,\text{L}^{-3}}\right] = [\text{L}^2\,\text{T}^{-1}]$ tem o nome de viscosidade cinemática.

A sua unidade C. G. S. é o stoke que corresponde ao poise; ao centipoise corresponde o centistoke.

2 — *Viscosímetro de Saybolt*

Sendo t o número de segundos de escoamento de 60 cc de líquido (designado, na América por S. U. S. ou seja Saybolt Universal Seconds),

$$\frac{\mu}{\rho} = 0{,}226\,t - \frac{195}{t} \text{ (para } t \leqslant 100) \quad (\mu \text{ em centipoises e } \rho \text{ em gr cm}^{-3})$$

$$\frac{\mu}{\rho} = 0{,}220\,t - \frac{135}{t} \text{ (para } t > 100) \quad (\mu \text{ em centipoises e } \rho \text{ em gr cm}^{-3})$$

3 — *Viscosímetro de Redwood*

Sendo t o número de segundos de escoamento de 50 cc de líquido (designado, na América por R. S. S., isto é, Redwood Standard Seconds),

$$\frac{\mu}{\rho} = 0{,}260\,t - \frac{180}{t} \quad (\mu \text{ em centipoises e } \rho \text{ em gr cm}^{-3}) \text{ (1)}$$

III — *Influência da viscosidade na variação de volume de um fluido*

Consideremos, de novo, o volume v da fig. 2 e suponhamos que, a menos de infinitésimos de ordem superior, a superfície dS

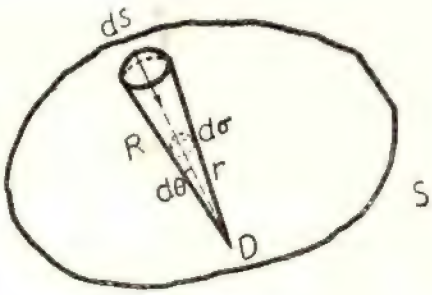


Fig. 4

é uma calote esférica cujas normais no contorno definem uma superfície cónica de vértice no ponto D (fig. 4).

(1) Muitas vezes utiliza-se a viscosidade específica que é a relação entre a viscosidade do fluido considerado e a de outro tomado para unidade. Representando por μ_e o coeficiente de viscosidade específica e por μ_u o da unidade será $\mu = \mu_e \cdot \mu_u$.

Se houver uma variação de pressão e o fluido for compressível, o volume do sólido limitado pela calote esférica e pela superfície cónica variará também, mantendo-se, constante, no entanto, a abertura da superfície cónica. Um ponto qualquer M, do líquido será obrigado a aproximar-se ou a afastar-se do vértice consoante o volume diminuir ou aumentar. Mas, como o sólido se mantém semelhante ao sólido inicial, o movimento do ponto, em relação ao vértice é acompanhado, simultâneamente, de uma aproximação ou afastamento do eixo, ou seja de um escorregamento sobre a calote $d\sigma$.

Por outro lado, a velocidade de escorregamento é tanto maior quanto maior for a distância da calote $d\sigma$ ao vértice e, portanto, aparece uma força de atrito que se opõe ao escorregamento. Essa força de atrito dá origem ao aparecimento da força P_1 aplicada em dS, que se opõe à variação de volume e que será dirigida para fora ou para dentro, conforme se trate de uma compressão ou de uma dilatação.

Atendendo à isotropia dos fluidos, cada ponto se deslocará radialmente e, portanto, o problema reduz-se ao estudo do que se passa numa cunha do sólido de abertura $d\varphi$ (fig. 5).

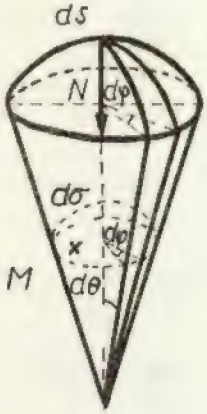


Fig. 5

A força P_1 será a soma de todas as forças dirigidas sobre cada uma das cunhas e a sua componente tangencial P_{1t} há-de ser igual à força de atrito f_a sobre cada cunha (fig. 6)*(1), isto é $P_{1t} = f_a$.

(1) Nesta figura, supõe-se P_1 dirigido para dentro; se fosse para fora, o raciocínio era o mesmo.

Mas, $P_{1t} = P_1 \operatorname{sen}(d\theta) = P_1\, d\theta$, visto que $\operatorname{sen}(d\theta)$ e $d\theta$ são infinitésimos equivalentes(1). Logo

$$P_1\, d\theta = f_a$$

Sobre uma superfície $d\sigma$ à distância r do vértice, a força de atrito, será, como vimos:

$$F_\sigma = \mu\, d\sigma \frac{dU}{dn}$$

Mas,

$$\frac{dU}{dn} = \operatorname{grad} U \Big|_{N}^{(2)} = \frac{dU}{dr}\Big|_{N} = \frac{dU}{dr}$$

Por outro lado, a velocidade das partículas é proporcional à distância ao vértice e, portanto,

$$\frac{U + dU}{U} = \frac{r + dr}{r} \quad \text{ou,} \quad \frac{dU}{U} = \frac{dr}{r},$$

ou ainda

$$\frac{dU}{dr} = \frac{U}{r}$$

Portanto

$$F_\sigma = \mu\, d\sigma \frac{U}{r}$$

Mas, $U = \frac{ds}{dt}$, sendo s o arco que limita

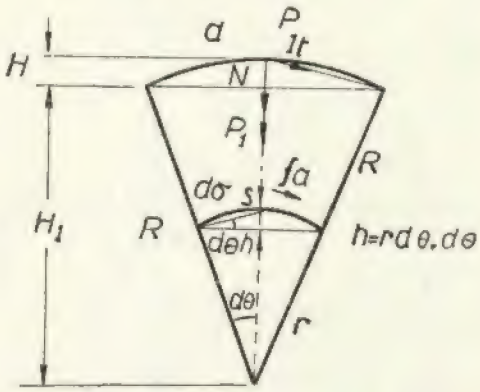


Fig. 6

a face da cunha representada na fig. 6, ou seja $s = r d\theta$; como $d\theta$ é constante, será

$$U = \frac{dr}{dt}\, d\theta$$

(1) Cálculo integral — Infinitésimos.
(2) Cálculo integral — Cálculo vectorial.

Como, além disso,

$$d\sigma = \frac{d\varphi}{2\pi} 2\pi r h = d\varphi r \,.\, r\, d\theta \,.\, d\theta = d\varphi\, r^2\, d\theta^2 ,$$

a força F_σ será

$$F_\sigma = d\varphi\, \mu\, (d\theta)^3 \frac{\frac{dr}{dt}}{r} \,.\, r^2$$

Mas a velocidade radial $\frac{dr}{dt}$ é proporcional à distância ao vértice e, portanto

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{r} = \frac{\frac{dR}{dt}}{R}$$

Finalmente,

$$F_\sigma = d\varphi\, \mu\, (d\theta)^3 \frac{\frac{dR}{dt}}{R} \,.\, r^2$$

A força de atrito elementar será

$$d F_\sigma = 2 d\varphi\, \mu\, (d\theta)^3 \frac{\frac{dR}{dt}}{R} \,.\, r\, dr$$

Portanto, a força de atrito total sobre a cunha considerada será

$$f_a = 2\, d\varphi\, \mu\, (d\theta)^3 \frac{\frac{dR}{dt}}{R} \int_0^R r\, dr$$

$$= d\varphi\, \mu\, (d\theta)^3 \frac{\frac{dR}{dt}}{R} R^2 = \mu \frac{\frac{dR}{dt}}{R} d\theta\, dS ,$$

visto que $dS = d\varphi\, R^2\, d\theta^2$.

Da igualdade inicial, conclui-se que

$$P_1 = \mu \frac{\frac{dR}{dt}}{R} dS$$

Convém transformar esta expressão do seguinte modo:

O volume do sólido é

$$v = \frac{d\varphi}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \pi R_1^2 H_1 + \frac{2}{3} \pi R_1^2 H \right) =$$

$$= \frac{d\varphi\, R_1^2}{6} \left(H_1 + 2 H \right)$$

Mas, a menos de infinitésimos de ordem superior,

$$R_1 = R\, d\theta ,\ H_1 = R \text{ e } H = R\, (d\theta)^2$$

Logo

$$v = \frac{d\varphi\, R^3\, (d\theta)^2}{6} \left[1 + (d\theta)^2 \right] = \frac{d\varphi\, R^3\, (d\theta)^2}{6}$$

Desta expressão conclui-se que

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v} = \frac{\frac{d\varphi\, R^2\, (d\theta)^2}{2} \,.\, \frac{dR}{dt}}{\frac{d\varphi\, R^3\, (d\theta)^2}{6}} = 3 \frac{\frac{dR}{dt}}{R} ,$$

ou

$$\frac{\frac{dR}{dt}}{R} = \frac{1}{3} \frac{\frac{dv}{dt}}{v}$$

Mas, os volumes variam na razão inversa das densidades, isto é $\rho v =$ constante; portanto

$$v \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dv}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v} = - \frac{\frac{d\rho}{dt}}{\rho} = \text{div } V$$

(equação da continuidade)

Será, portanto,

$$P_1 = \frac{1}{3} \mu \text{ div } V\, dS$$

Como P_1 é dirigido segundo a normal, a força total de atrito será

$$F_a = \int_S (P_1 N)\, dS = \int_S \left(\frac{1}{3} \mu \text{ div } V\, N \right) dS .$$

Esta força F_a tem sempre sentido contrário ao de F_p.

IV — *Influência da viscosidade no movimento de um fluido*

Considerando as três componentes u, v e w da velocidade V dum ponto M, as componentes da força de atrito F'_a que se opõe ao movimento, serão

$$F'_x = \int_S \mu \frac{du}{dn} dS$$

$$F'_y = \int_S \mu \frac{dv}{dn} dS$$

$$F'_z = \int_S \mu \frac{dw}{dn} dS$$

É evidente que esta força de atrito tem o sentido oposto ao das forças aplicadas.

4) *Estabelecimento das equações do movimento*

Para escrever as equações do movimento basta estabelecer a condição de equilíbrio entre as forças mássicas e todas as restantes. Para isso convém referir todas as forças ao volume v, pelos teoremas do Cálculo Integral.

I — *Teorema do Gradiante*

Este teorema permite fazer as seguintes transformações:

$$F_p = \int_S (pN)\, dS = \int_v \text{grad } p\, dv$$

$$F_a = \int_S \left(\frac{1}{3}\, \mu \text{ div } VN\right) dS =$$

$$= \int_v \frac{1}{3}\, \mu \text{ grad (div V) } dv$$

II — *Teorema de Green*

Permite transformar as expressões das componentes de F'_a

$$F'_x = \int_S \mu \frac{du}{dn}\, dS = \int_v \mu\, \Delta u\, dv$$

$$F'_y = \int_S \mu \frac{dv}{dn}\, dS = \int_v \mu\, \Delta v\, dv$$

$$F'_z = \int_S \mu \frac{dw}{dn}\, dS = \int_v \mu\, \Delta w\, dv\ ,$$

em que Δu, Δv e Δw representam os laplacianos de u, v e w.

Portanto

$$F'_a = \left(\int_v \mu \Delta u\, dv\right) I + \left(\int_v \mu \Delta v\, dv\right) J + \left(\int_v \mu \Delta w\, dv\right) K$$

III — *Equação de equilíbrio*

A condição de equilíbrio será

$$\int_v \rho (F - M'')\, dv = \int_v \left[\text{grad } p - \frac{1}{3}\, \mu \text{ grad (div V)}\right] dv - \left(\mu \int_v \Delta u\, dv\right) I - \left(\mu \int_v \Delta v\, dv\right) J - \left(\mu \int_v \Delta w\, dv\right) K$$

Esta igualdade é verdadeira qualquer que seja o volume de integração; portanto, as funções integrandas devem ser iguais. Considerando as componentes das diferentes forças indicadas, ter-se-á:

$$F = X\, I + Y\, J + Z\, K$$

$$M'' = x''\, I + y''\, J + z''\, K$$

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} I + \frac{\partial p}{\partial y} I + \frac{\partial p}{\partial z} K$$

$$\text{grad (div V)} = \frac{\partial (\text{div V})}{\partial x} I + \frac{\partial (\text{div V})}{\partial y} J + \frac{\partial (\text{div V})}{\partial z} K$$

Igualando entre si, as componentes, virá

$$\begin{cases} \rho (X - x'') = \dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{1}{3}\, \mu \dfrac{\partial (\text{div V})}{\partial x} - \mu\, \Delta u \\ \rho (Y - y'') = \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{1}{3}\, \mu \dfrac{\partial (\text{div V})}{\partial y} - \mu\, \Delta v \\ \rho (Z - z'') = \dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{1}{3}\, \mu \dfrac{\partial (\text{div V})}{\partial z} - \mu\, \Delta w\ , \end{cases}$$

ou, como é mais usual, atendendo a que

$$x'' = \frac{du}{dt}\ ,\ y'' = \frac{dv}{dt}\ ,\ z'' = \frac{dw}{dt}\ ,$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{du}{dt} = \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{3}\, \mu \dfrac{\partial (\text{div V})}{\partial x} + \mu\, \Delta u \\ \rho \dfrac{dv}{dt} = \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{1}{3}\, \mu \dfrac{\partial (\text{div V})}{\partial y} + \mu\, \Delta v \\ \rho \dfrac{dw}{dt} = \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{1}{3}\, \mu \dfrac{\partial (\text{div V})}{\partial z} + \mu\, \Delta w \end{cases}$$

Estas equações são as equações indefinidas do movimento de um fluido qualquer.

5) *Casos particulares*

I — *Hidrostática*

Neste caso, V = 0. Portanto, fica, sòmente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho X \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \end{cases}$$

II — *Hidrodinâmica dos fluidos perfeitos*

Chamam-se fluidos perfeitos aqueles cuja viscosidade é nula, ou seja $\mu = 0$. Fica, portanto

$$\begin{cases} \rho \dfrac{du}{dt} = \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dv}{dt} = \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \dfrac{dw}{dt} = \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

III — *Hidrodinâmica dos fluidos incompressíveis reais*

Será,

div $V = 0$ (ver equação da continuidade). Logo

$$\begin{cases} \rho \dfrac{du}{dt} = \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \dfrac{dv}{dt} = \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \dfrac{dw}{dt} = \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \end{cases}$$

CAPÍTULO II

HIDROSTÁTICA

a) *Generalidades*

Combinando as equações do primeiro caso particular do capítulo anterior, ter-se-á:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

ou,

$$dp = \rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

equação que, integrada, dá

$$p = p(x, y, z)$$

A equação

$$p(x, y, z) = \text{Constante},$$

representa uma superfície sobre a qual a pressão é constante (superfície isobárica ou isóbara).

b) *Fluidos incompressíveis*

1) *Caso de forças conservativas*

Neste caso

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU \text{ (1)}$$

Portanto,

$$dp = \rho\, dU,$$

sendo ρ constante em relação à pressão, mas função de U: $\rho = f(U)$.

Ficará

$$dp = f(U)\, dU$$

ou

$$p = \int f(U)\, dU = \Theta(U) + C$$

As superfícies para as quais U é constante são superfícies equipotenciais (2) as quais são simultâneamente superfícies de igual densidade, atendendo à relação $\rho = f(U)$ e isobáricas, devido à relação $p = \Theta(U) + C$.

2) *Líquidos homogéneos*

Para estes ρ é constante, também, em relação a U e, por isso

$$p = \rho U + C$$

ou

$$p - p_0 = \rho (U - U_0)$$

No caso de líquidos simplesmente pesados, $U = -gz$ e, portanto

$$p - p_0 = \rho g (z_0 - z)$$

Como ρg representa o peso específico γ, de dimensões $[ML^{-3} \,.\, LT^{-2}] = [ML^{-2}T^{-2}]$, será

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + (z_0 - z) = \frac{p_0}{\gamma} + h,$$

sendo h a diferença de nível

O cociente $\frac{p}{\gamma}$ de dimensões $\left[\frac{L^{-1}MT^{-2}}{L^{-2}MT^{-2}}\right] = [L]$, representa uma altura que se designa por altura piezométrica.

Da expressão anterior, que relaciona as alturas piezométricas $\frac{p}{\gamma}$ e $\frac{p_0}{\gamma}$ a dois níveis diferentes, se tiram fàcilmente as seguintes

(1) Mecânica Racional — Trabalho.
(2) Mecânica Racional — Trabalho.

conclusões, já conhecidas, válidas para qualquer líquido simplesmente pesado:

1.ª) As superfícies isobáricas são planos horizontais.

2.ª) A superfície de separação de dois líquidos imiscíveis de densidades diferentes é uma superfície isobárica.

3.ª) Princípio dos vasos comunicantes.

4.ª) Princípio de Pascal [1].

3) *Pressões sobre superfícies*

I — *Caso Geral*

Consideremos um recipiente contendo um líquido qualquer e calculemos a força exercida sobre uma certa superfície desse recipiente (fig. 7), escolhendo os eixos coordenados de modo que Oz seja vertical e Ox e Oy estejam no plano horizontal da superfície livre.

A força exercida pelo líquido sobre o elemento dS é igual e oposta à que o recipiente exerce sobre o líquido e, portanto, é dirigida segundo a normal exterior. Representando a força de pressão total exercida sobre a superfície S por $\overline{p}$, será, como já vimos

$$\overline{p} = \int (p\,N)\,d\,S.$$

Como se trata de um líquido simplesmente pesado,

$$p = p_o + \gamma\,h = p_o + \gamma\,z$$

A pressão p_o, na superfície livre é igual à pressão atmosférica [1]; mas como esta pressão se exerce, também, sobre a face exterior da superfície S, a pressão real sobre a superfície será

$$p_o + \gamma\,z - p_o = \gamma\,z$$

Portanto,

$$\overline{p} = \int_S (\gamma\,z\,N)\,dS\,.$$

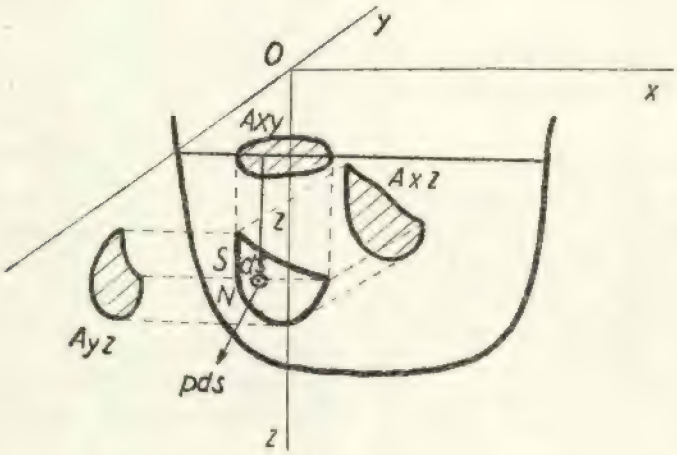


Fig. 7

Sendo cos α, cos β, cos γ as componentes de N, as componentes de $\overline{p}$ serão

$$\begin{cases} \overline{p}_x = \gamma \int_S z \cos\alpha\,dS \\ \overline{p}_y = \gamma \int_S z \cos\beta\,dS \\ \overline{p}_z = \gamma \int_S z \cos\gamma\,dS \end{cases}$$

---

[1] Para concretizar as equações da hidrostática é aconselhável resolver alguns problemas. Por exemplo, podem utilizar-se os problemas n.os 1 a 11 do livro «Problemas de Mecânica General y Aplicada», de F. Wittenbauer, tomo III. Para o estudo da distribuição de pressões, podem resolver-se os problemas n.os 12 a 40, do mesmo livro.

[1] Como se sabe, a pressão atmosférica corresponde a uma altura piezométrica de $0^m,760$ de mercúrio, para o qual $\gamma = 13.600\ kg/^{m3}$. Portanto $p = 13.600 \times 0,760\ kg/^{m2} = 10.336\ kg/^{m2}$.

Mas dS pode ter qualquer das seguintes expressões:

$$dS = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \frac{dx\,dz}{\cos\beta} = \frac{dy\,dz}{\cos\alpha}, \text{ (1)}$$

sendo dx dy, dx dz, dy dz as projecções de dS, respectivamente, sobre os planos x Oy, x Oz e y Oz.

Escolhendo para cada uma das componentes de $\bar{p}$ a expressão mais conveniente de dS, ter-se-á

$$\begin{cases} \bar{p}_x = \gamma \iint_{A_{yz}} z\,dy\,dz \\ \bar{p}_y = \gamma \iint_{A_{xz}} z\,dx\,dz \\ \bar{p}_z = \gamma \iint_{A_{xy}} z\,dx\,dy, \end{cases}$$

em que Ayz, Axz, Axy representam as projecções da área S sobre os três planos coordenados.

É mais útil exprimir os valores de $\bar{p}_x$ e $\bar{p}_y$ em função das áreas A_{yz} e A_{xz} para o que se utilizarão as expressões que dão as coordenadas segundo o eixo Oz dos centros de gravidade dessas áreas. Como se sabe (2), representando essas coordenadas por Z_{yz} e Z_{xz}, tem-se

$$Z_{yz} = \frac{\iint_{A_{yz}} z\,dy\,dz}{A_{yz}}$$

$$Z_{xz} = \frac{\iint_{A_{xz}} z\,dx\,dz}{A_{xz}}$$

Por outro lado, $\iint_{A_{xy}} z\,dx\,dy$ representa o volume v da coluna de líquido compreendida entre S e A_{xy} (3) e, portanto, as componentes $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ e p_z tomam as seguintes formas usuais:

$$\begin{cases} \bar{p}_x = \gamma \cdot A_{yz} \cdot Z_{yz} \\ \text{(peso de uma coluna de líquido de base } A_{yz} \text{ e altura } Z_{yz}) \\ \bar{p}_y = \gamma \cdot A_{xz} \cdot Z_{xz} \\ \text{(peso de uma coluna de líquido de base } A_{xz} \text{ e altura } Z_{xz}) \\ \bar{p}_z = \gamma\, v \\ \text{(peso da coluna de líquido compreendida entre } A_{xy} \text{ e S) (1)} \end{cases}$$

Em geral o sistema das forças elementares $(\gamma z N)\,d S$ não é equivalente a uma força única e, portanto, a resultante $\bar{p}$ de $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ e $\bar{p}_z$ não interessa muito porque não

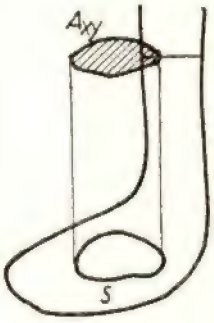


Fig. 8

dá, realmente, o esforço total exercido sobre a superfície S. Sob o ponto de vista prático, também não há interesse na determinação de $\bar{p}$, porque o que se pretende, nos problemas de aplicação, é conhecer a componente vertical $\bar{p}_z$, ou a componente horizontal numa direcção dada e esta determina-se por qualquer das expressões $\bar{p}_x$ ou $\bar{p}_y$ desde que se faça coincidir o eixo Ox ou o eixo Oy, com essa direcção (2).

II — *Superfícies Planas*

Neste caso, um dos eixos, por exemplo O_y, pode ser escolhido sobre o plano da

(1) Cálculo Integral — Integrais de superfície.

(2) Mecânica Racional — Centros de Gravidade.

(3) Visto que $v = \iiint dx\,dy\,dz = \iint dx\,dy \int_0^z dz = \iint z\,dx\,dy$.

(1) Deve notar-se que o volume v pode não estar cheio de líquido, como se vê na figura 8.

(2) É aconselhável resolver os problemas n.os 72 a 86 do livro citado.

superfície e, por conveniência, considera-se perpendicular ao plano do papel (fig. 9).

A equação da superfície é a de um plano passando pelo eixo O_y e, portanto,

$$z = x \operatorname{tg}\alpha$$

Nestas condições, as componentes da força de pressão apresentam algumas simplifica-

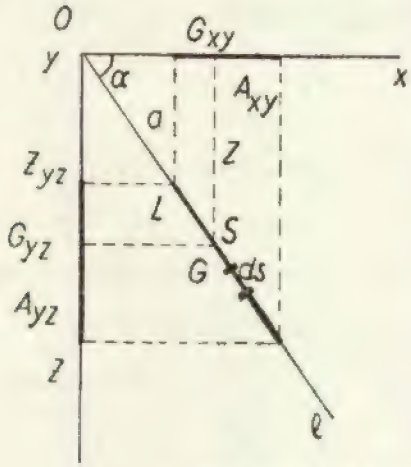


Fig. 9

ções. Em primeiro lugar, $A_{xz} = 0$ e, portanto $\bar{p}_y = 0$; em segundo lugar, a expressão $\int\int z\, dxdy$, pode ser transformada de modo a simplificar-se.

Com efeito, a coordenada Z do centro de gravidade de S é

$$Z = \frac{\int z dS}{\int dS}$$

Exprimindo dS em função de dx dy, será

$$dS = \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dx\ dy\ (^1)\ ,$$

sendo

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha \\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$dS = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\ dx\ dy = \sec\alpha\ dx\ dy$$

e

$$Z = \frac{\sec\alpha \int\int z\, dx\, dy}{\sec\alpha \int\int dx\, dy}\ ,$$

(1) Cálculo Integral — Integrais de Superfície.

ou

$$\int\int z\, dx\, dy = Z \int\int dx\, dy = Z \,.\, A_{xy} = Z \,.\, S \cos\alpha$$

Pela mesma razão,

$$\int\int z\, dy\, dz = Z \int\int dy\, dz = Z \,.\, A_{yz} = Z \,.\, S \operatorname{sen}\alpha$$

Finalmente, as componentes $\bar{p}_x$ e $\bar{p}_z$ serão

$$\begin{cases} \bar{p}_x = \gamma \,.\, A_{yz} \,.\, Z_{yz} = \gamma ZS \operatorname{sen}\alpha \\ \bar{p}_z = \gamma \,.\, v = \gamma\ ZS \cos\alpha \end{cases}$$

O sistema, neste caso, é equivalente a uma força única que será

$$\bar{p} = \sqrt{\bar{p}_x^{\,2} + \bar{p}_y^{\,2}} = \gamma ZS\ ,$$

isto é, a força de pressão total sobre uma superfície plana é igual ao peso de um cilindro de líquido de base S e altura Z, qualquer que seja o ângulo de inclinação α.

III — *Centro de Pressão*

No caso anterior, em que o sistema é equivalente a uma força única há interesse em determinar o seu ponto de aplicação M que se chama centro de pressão. Este ponto é o centro das forças paralelas elementares $d\bar{p}$ que actuam sobre a superfície S. Representando as coordenadas desse ponto por j_x, j_y e j_z, ter-se-á

$$\begin{cases} j_x = \dfrac{\int x\, d\bar{p}}{\bar{p}} \\ j_y = \dfrac{\int y\, d\bar{p}}{\bar{p}} \\ j_z = \dfrac{\int z\, d\bar{p}}{\bar{p}} \end{cases}$$

Mas $d\bar{p}$ é a força de pressão sobre a superfície dS e, portanto,

$$d\bar{p} = \gamma z\ dS$$

As coordenadas do centro de pressão, serão, pois

$$\begin{cases} j_x = \dfrac{\int \gamma xz\, dS}{\gamma\, ZS} \\ j_y = \dfrac{\int \gamma yz\, dS}{\gamma\, ZS} \\ j_z = \dfrac{\int \gamma z^2\, dS}{\gamma\, ZS} \end{cases}$$

Na prática, em geral, em vez da coordenada j_x, utiliza-se j_l que é a distância de M ao eixo O_y e exprimem-se as duas primeiras coordenadas em função de l, atendendo a que $z = l \operatorname{sen} \alpha$. Como γ é constante, nos casos correntes, ter-se-á:

$$\begin{cases} j_l = \dfrac{\int l \,.\, l \operatorname{sen}\alpha\, dS}{L \operatorname{sen}\alpha\, S} = \dfrac{\int l^2\, dS}{LS} = \dfrac{B}{LS} = \\ \qquad = \dfrac{I + SL^2}{LS} = \dfrac{I}{LS} + L \\ j_y = \dfrac{\int yl \operatorname{sen}\alpha\, dS}{l \operatorname{sen}\alpha\, S} = \dfrac{\int yl\, dS}{LS} \\ j_z = \dfrac{\int z^2\, dS}{ZS} = \dfrac{\int l^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, dS}{ZS} = \dfrac{B \operatorname{sen}^2\alpha}{ZS} = \\ \qquad \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha\,(I + SL^2)}{ZS} = \dfrac{I \operatorname{sen}^2\alpha}{ZS} + Z \end{cases}$$

sendo L, a distância de G a Oy, B o momento de inércia da área S em relação ao eixo Oy [1], e I o momento de inércia da área S em relação a um eixo paralelo a Oy passando por G.

No caso particular de superfícies planas verticais, é evidente que $jl = jz$, visto que, neste caso, $\alpha = 90^\circ$, $l = z$ e $L = Z$; portanto as coordenadas do centro de pressão serão

$$\begin{cases} j_y = \dfrac{\int y\, z\, dS}{Z\, S} = \dfrac{F}{Z\, S} \\ j_z = \dfrac{I}{Z\, S} + Z\,, \end{cases}$$

em que F representa o produto de inércia $\Sigma\, m\, y\, z$ [2].

(1) Mecânica Racional — Momentos de Inércia.

(2) Convém resolver os problemas 41 a 71 do livro citado.

CAPÍTULO III

HIDRODINÂMICA DOS FLUIDOS PERFEITOS

a) *Generalidades*

Como se viu, a influência da viscosidade no movimento de um fluido traduz-se pelo aparecimento de forças de atrito da forma

$$d\, F_a = \mu\, d\, S\, \frac{d\, U}{d\, n}\,,$$

as quais serão tanto menores quanto menor for $\frac{dU}{dn}$, isto é, quanto menores forem as diferenças de velocidades entre superfícies contíguas. No caso limite de ser $\frac{dU}{dn} = 0$ a influência da viscosidade será nula e, portanto, as equações do movimento serão as mesmas que se obteriam fazendo $\mu = 0$, isto é, se o fluido fosse perfeito. Por isso, estudam-se, em primeiro lugar, os fluidos perfeitos e introduzem-se as correcções devidas à viscosidade, conforme as condições particulares de cada movimento.

Consideremos, então, as equações obtidas no Capítulo I para os fluidos perfeitos chamadas equações indefinidas da hidrodinâmica dos fluidos perfeitos [1].

Convém transformar estas equações exprimindo as derivadas totais, $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ em função das derivadas parciais em ordem a t, x, y, z [2], supondo que as forças são conservativas $\left(X = \frac{\partial U}{\partial x}\,,\ Y = \frac{\partial U}{dy}\,,\ Z = \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ e fazendo $\frac{dp}{\rho} = d\omega \left(\text{isto é } \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\omega}{dx}\,,\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dy} = \right.$ $\left. = \frac{\partial \omega}{\partial y}\,,\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z}\right)$. Obtêm-se as seguintes

(1) Estas equações são vulgarmente chamadas equações de Euler.

(2) Por exemplo, $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{du}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w$

equações, chamadas equações de Euler:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial x} u + \dfrac{\partial u}{\partial y} v + \dfrac{\partial u}{\partial z} w = \dfrac{\partial (U - \bar{\omega})}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} u + \dfrac{\partial v}{\partial y} v + \dfrac{\partial v}{\partial z} w = \dfrac{\partial (U - \bar{\omega})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial x} u + \dfrac{\partial w}{\partial y} v + \dfrac{\partial w}{\partial z} w = \dfrac{\partial (U - \bar{\omega})}{\partial z} \end{cases}$$

Para aplicar estas equações, estudemos, em primeiro lugar, o que se passa no interior de um fluido em movimento.

Cada partícula do fluido descreve uma trajectória tangente em cada ponto à velocidade desse ponto e que se chama linha de corrente (1). As linhas de corrente determinam-se, como é evidente, pela integração do sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

O problema é fundamentalmente diferente, consoante as linhas de corrente forem curvas fechadas (movimento turbilhonar ou rotacional) ou abertas (movimento não turbilhonar ou irrotacional).

Como se sabe (2), as linhas de corrente serão abertas ou fechadas, conforme o integral $\int_L u dx + v dy + w dz = \int_L V \mid dP$, ao longo do contorno fechado L for nulo ou diferente de zero.

Por outro lado, sabe-se (3) que

$$\int_L V \mid dP = \int_S (\text{rot } V \mid N)\, dS$$

sendo S uma superfície qualquer que se apoie em L; portanto, este integral de superfície será nulo ou não nulo, conforme $\text{rot } V = 0$, ou $\text{rot } V \gtrless 0$.

Do estudo da cinemática dos sólidos, sabe-se (4) que a velocidade angular é

$$\Omega = pI + qJ + rK = \frac{1}{2} \text{rot } P'$$

Anàlogamente, no movimento dos fluidos, define-se um vector Ω que tem o nome de vector turbilhão, cujas componentes são p, q e r e que é metade da rotação da velocidade de V:

$$\Omega = pI + qJ + rK = \frac{1}{2} \text{rot } V \quad (1)$$

Da expressão de Ω se conclui que o movimento é rotacional ou irrotacional, conforme $\Omega \gtrless 0$ ou $\Omega = 0$.

Demonstra-se (2) que, se Ω é nulo num dado instante, será sempre nulo, e que se não for nulo, em qualquer instante, também nunca o será, o que equivale a dizer que a característica turbilhonar ou não turbilhonar se mantém (3).

Os movimentos de maior interesse prático são os irrotacionais.

b) *Movimentos irrotacionais*

Para estes movimentos, $\text{rot } V = 0$ e, portanto,

$$V = \text{grad } \varphi \quad (4)$$

Sendo assim,

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

(1) Por uma questão de analogia, convém relacionar este estudo com o estudo do Trabalho.

(2) Cálculo Integral — Integrais Curvilíneos.

(3) Cálculo Integral — Teorema de Stokes.

(4) Mecânica Racional — Cinemática dos Sólidos.

(1) As componentes de Ω são
$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

(2) A demonstração faz-se a partir das equações de Cauchy que não apresentamos para não sobrecarregar a exposição.

(3) Parece que, em face desta afirmação, todo o movimento que parte do repouso (em que $\Omega = o$) será sempre irrotacional. Isso pode não ser verdade: Basta que o movimento comece por uma mudança de estado. Aliás, os movimentos dos fluidos reais, nunca são irrotacionais devido à viscosidade.

(4) Cálculo Integral — Cálculo Vectorial.

Apliquemos estes valores das componentes da velocidade às equações de Euler. A primeira será

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial (U - \omega)}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} = \frac{\partial (U - \omega)}{\partial x}$$

Fazendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] = K ,$$

vem

$$\frac{\partial}{\partial x} (K - U + \omega) = 0$$

As restantes equações de Euler darão

$$\frac{\partial}{\partial y} (K - U + \omega) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (K - U + \omega) = 0$$

Destas três equações se conclui que

$$K - U + \omega = \text{constante},$$

ou, substituindo K pelo seu valor,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] - U + \omega = \text{constante} ,$$

que é a chamada equação da energia e é aplicável a todos os movimentos irrotacionais.

c) *Movimentos irrotacionais planos*

Neste caso, ter-se-á

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = u \\ \dfrac{\partial \varphi}{dy} = v \end{cases}$$

e a equação da energia será

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] - U + \omega = \text{constante}.$$

A equação diferencial das linhas de corrente é, como sabemos,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

ou

$$v\, dx - u\, dy = 0$$

Esta forma pfaffiana é uma diferencial exacta quando

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

ou seja, quando div $V = 0$, o que se verifica para os líquidos e se poderá verificar para os gases no caso particular de ser $\frac{d\rho}{dt} = 0$ [1] (ver equação de continuidade).

Neste caso, pode escrever-se, portanto,

$$v dx - u dy = d\, \psi ,$$

ou

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -u = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$$

Estas igualdades exprimem as condições de analiticidade ou monogeneiedade da função de variável complexa

$$\phi + i\, \psi = f\, (x + i\, y) \text{ [2]}$$

Esta conclusão mostra a importância das funções analíticas no estudo dos movimentos planos. Embora a sua aplicação prática se destine especialmente aos problemas da aviação, far-se-ão, mais adiante, duas aplicações simples.

---

[1] Esta condição restringe, muitíssimo, o problema do movimento dos gases; por isso, só se aplica quando o gás está imóvel e se pretende estudar o movimento de um sólido através dele — problema fundamental da aviação.

[2] Cálculo Integral — Funções Analíticas.

d) *Movimento permanente de um fluido*

Chama-se movimento permanente aquele em que a velocidade de qualquer partícula do fluido é sempre a mesma num mesmo ponto do espaço, isto é, a velocidade de qualquer partícula é só função de (x, y, z) e não do tempo e, por isso, as derivadas, em ordem ao tempo, serão nulas.

Portanto, a equação da energia, será

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]-$$
$$-U+\omega=\text{constante.}$$

Mas, como

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=u^2+v^2+w^2=V^2,$$

ter-se-á

$$\frac{1}{2}V^2-U+\omega=\text{constante}$$

que é a equação geral do movimento irrotacional e permanente de qualquer fluido perfeito.

A partir deste momento, passaremos a considerar exclusivamente o caso dos líquidos.

e) *Movimento permanente de um líquido homogéneo*

Neste caso, ρ é constante e, portanto, a integração da equação $\frac{dp}{\rho}=d\omega$, dá

$$\omega=\frac{p}{\rho}$$

Logo, fica

$$\frac{1}{2}V^2-U+\frac{p}{\rho}=\text{constante}.$$

f) *Movimento permanente de um líquido homogéneo simplesmente pesado*

1 — *Expressão geral*

Neste caso,

$$U=-gz$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}V^2+gz+\frac{p}{\rho}=\text{constante, ou}$$

$$\frac{1}{2g}V^2+z+\frac{p}{\gamma}=\text{constante.}$$

A equação obtida é a equação de Bernouilli, que relaciona a velocidade, a cota e a pressão de uma partícula líquida.

Por analogia com a relação da hidrostática, pode escrever-se

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_0}{\gamma}+(z_0-z)+\frac{1}{2g}(V_0^2-V^2),$$

ou

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_0}{\gamma}+h+\frac{1}{2g}(V_0^2-V^2)$$

2 — *Aplicação ao escoamento por orifícios*

Considere-se um orifício de área S aberto no fundo de um recipiente (fig. 10).

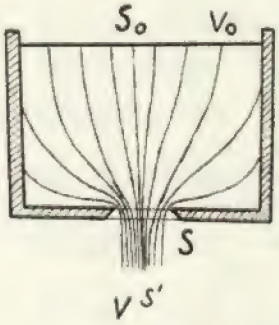


Fig. 10

O caudal Q, ou seja o volume de líquido que se escoa por segundo é o fluxo do vector V através da superfície S:

$$Q=\int_S(V\,|\,N)\,dS$$

Para determinar V, recorre-se à equação de Bernoulli, tendo em consideração que V_0^2 deverá ser uma certa fracção de V^2, isto é, $V_0^2=n^2V^2$:

$$\frac{p_0-p}{\gamma}+z=\frac{V^2}{2g}(1-n^2)$$

Mas V^2 é o quadrado do módulo de V e por isso só permite determinar V se se admitir que a velocidade é a mesma em todos os pontos de S e sempre perpendicular a esta superfície. Representando, como anteriormente, módulo de V por U será, nestas condições,

$$U = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + z\right)}{1 - n^2}}$$

e

$$Q = \int_S (V \mid N)\, dS = \int_S U\, dS =$$

$$= US = S\sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + z\right)}{1 - n^2}}$$

Na prática, em geral, dão-se as seguintes condições:

1.ª) V_0^2 é muito pequeno em relação a V^2 e, portanto, $n^2 \sim 0$ (1)

2.ª) As pressões p e p_0 são aproximadamente iguais.

Ficará, portanto,

$$U = \sqrt{2g\,z}\,,$$

que é o chamado princípio de Torricelli.

O caudal, neste caso, será

$$Q = S \cdot \sqrt{2g\,z}$$

Quanto aos valores práticos de U e Q, verifica-se o seguinte:

1.º) O valor de U é ligeiramente inferior ao valor teórico;

2.º) O valor de Q é muito inferior ao valor teórico.

Estudemos cada caso separadamente.

3 — *Valor de U*

Como se viu, admitiu-se que a velocidade era, em todos os pontos perpendicular a S, mas, efectivamente, a velocidade em cada ponto é tangente a uma linha de corrente e, como se vê no traçado destas (fig. 10), o ângulo com a superfície S vai diminuindo do centro para a extremidade, embora, no conjunto, a influência no resultado seja pequena. Por isso, para conservar os raciocínios feitos, afecta-se o valor teórico de um coeficiente C_v chamado coeficiente de velocidade que oscila, na prática, entre 0,96 e 0,99.

Portanto,

$$U = c_v \sqrt{2\,gz}$$

4 — *Valor de Q*

É do conhecimento geral que a secção final da veia líquida S′ que é limitada pelas linhas de corrente extremas, é inferior a S; o coeficiente de proporcionalidade m entre as duas superfícies é chamado coeficiente de contracção.

Ter-se-á, portanto,

$$S' = m \,.\, S$$

Para determinar o valor de m, basta conhecer a equação das linhas de corrente que limitam a veia líquida. Em geral, não é fácil estabelecer essa equação, mas no caso que estamos a considerar, de um orifício aberto no fundo do recipiente, e considerando o movimento como plano, a aplicação da teoria das funções analíticas, permite resolver o problema.

A equação que se obtém é (1)

$$x = \frac{4\,b}{\pi}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}$$

$$y = \frac{2\,b}{\pi}\left\{\log \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) - \mathrm{sen}\,\theta\right\}\,,$$

sendo 2 b a largura final da veia líquida e variando θ no intervalo $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 11).

Esta curva passa pela origem dos eixos e no intervalo $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ é $x > 0$ e $y < 0$.

Para $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $y = -\infty$ e x é finito, havendo, portanto, uma assíntota paralela ao

(1) Se se quisesse calcular n recorria-se à equação de continuidade (div V = O). Pelo teorema de divergência, $\int_S (V \mid N)\, dS = \int_V \mathrm{div}\, V\, dv$ e, portanto, $\int_S (V \mid N)\, dS = 0$ ou $U_0 S_0 - U S = 0$. Logo $n = \frac{U_0}{U} = \frac{S}{S_0}$

(1) Como a demonstração é longa, apresentá-la-mos em apêndice, não pelo seu interesse prático, mas para dar um exemplo da aplicação das funções analíticas à hidrodinâmica.

eixo Oy. A abcissa correspondente a este valor de θ é

$$x = \frac{4\,b}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\,b}{\pi}$$

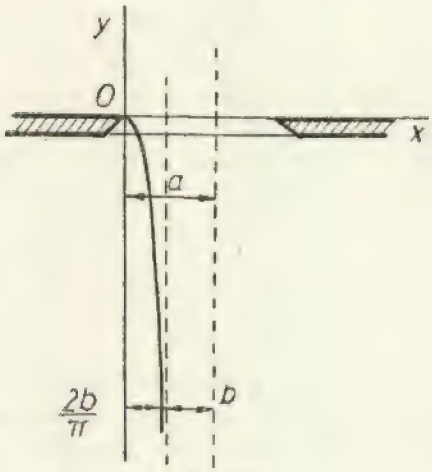


Fig. 11

Sendo assim, a largura da semi-abertura é

$$a = b + \frac{2\,b}{\pi} = \frac{(\pi + 2)\,b}{\pi}$$

e, portanto, o coeficiente de contracção é

$$m = \frac{b}{a} = \frac{b}{\frac{(\pi + 2)\,b}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}611$$

A experiência mostra que, mesmo no caso do movimento não ser plano, m tem sensìvelmente o valor achado e, na prática, toma-se, sempre, $m = 0{,}62$.

É evidente que, se se der ao orifício de saída a forma das linhas de corrente extremas, o valor de m será $m = 1$ (fig. 12).

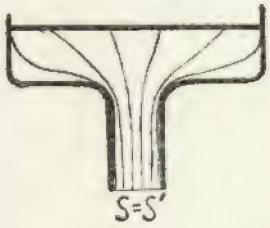


Fig. 12

Entrando com os coeficientes c_v e m, o caudal será

$$Q = c_v\, m \sqrt{2\,gz}\; S = c\sqrt{2\,gz}\; S\,,$$

sendo c chamado coeficiente de vazão e tem o valor usual de $c = 0{,}61$.

5 — *Tempo de vazão*

Considerando um recipiente qualquer, a quantidade escoada por segundo será

$$Q = -S_z \frac{dz}{dt} \qquad \text{(fig. 13)}$$

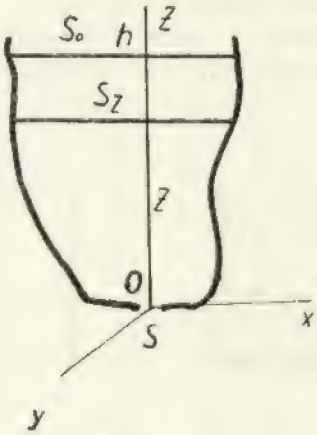


Fig. 13

Igualando este valor à expressão achada anteriormente, será

$$c\sqrt{2g}\,\sqrt{z}\,S = -\,S_z \frac{dz}{dt}$$

Portanto, o tempo necessário para baixar o nível do líquido de h a z, será

$$t = \frac{1}{c\,S\sqrt{2g}} \int_z^h \frac{S_z\,dz}{\sqrt{z}}$$

e o tempo total de escoamento

$$t = \frac{1}{c\,S\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{S_z\,dz}{\sqrt{z}}$$

Se houver uma entrada de líquido no recipiente com um caudal q, a diminuição de volume por segundo será

$$Q = c\sqrt{2\,gz}\,S - q$$

e, portanto, a igualdade anterior será

$$c\sqrt{2gz}\,S - q = -S_z \frac{dz}{dt},$$

ou

$$t = \int_h^z \frac{S_z\,dz}{q - c\sqrt{2gz}\,S}$$

6 — *Vazão por um orifício lateral*

Neste caso, como os diferentes pontos do orifício estão a alturas diferentes (fig. 14) as suas velocidades são, também, diferentes.

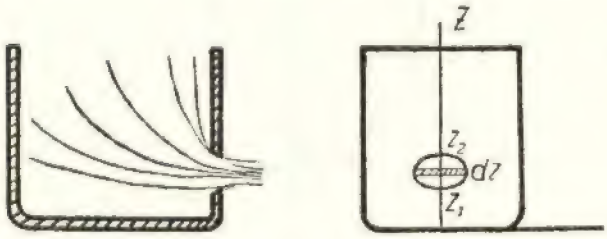


Fig. 14

Admitindo, porém, ainda que as velocidades de todos os pontos são perpendiculares a S, ter-se-á

$$Q = c\int (V \mid N)\,dS = c\int_S \sqrt{2gz}\,dS =$$

$$= c\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{2gz}\,l\,dz$$

sendo l a largura do orifício ao nível z.

O coeficiente de contracção, neste caso, varia com as dimensões do orifício (compreendido, em geral, entre 0,5 e 0,8) e há tabelas que dão os seus valores [1]. No caso especial de orifícios rectangulares, tem-se

$$Q = cl\sqrt{2g}\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{z}\,dz = \frac{2}{3}\,cl\sqrt{2g}\left(z_2^{3/2} - z_1^{3/2}\right)$$

Em geral, na prática, toma-se a altura média do orifício, o que, especialmente, para orifícios não muito grandes, dá uma aproximação suficiente.

7 — *Tipos diferentes de orifícios*

Com o fim de fazer variar c_v e m, podem adoptar-se várias formas de orifícios, que estudaremos mais adiante.

---

[1] Estas Tabelas encontram-se em quase todos os livros de hidráulica. Ver Bibliografia.

(Continua no próximo número)

ACABA DE APARECER:

TOPOGRAFIA GERAL

PELO ENG.º CARVALHO XEREZ

RESISTÊNCIA DE ESCORREGAMENTO DE TERRENOS ARENOSOS E ARGILOSOS

PELO DR. ING. ARMIN MALKWITZ

C. D. 624.131.53

Tem a «Técnica» a honra de apresentar um estudo sobre o problema do atrito e da coesão das terras, baseado em séries de ensaios que vêm sendo realizadas durante anos e que facultaram os resultados fundamentais quanto às propriedades físicas dos terrenos. Este artigo é uma síntese desse trabalho — premiado com a medalha de ouro na Exposition Internationale de la Technique de L'eau — Liege 1939 — o qual, no interesse comum, devia tornar-se do domínio público.

As chamadas teorias clássicas do impulso das terras, universalmente conhecidas como por exemplo as de Coulomb, Ranquine, etc., permitem o cálculo analítico das forças que se verificam nos maciços terrosos e a determinação das reacções provocadas por quaisquer construções ou fundações, que alterem o estado primitivo do equilíbrio do terreno.

Para estes cálculos empregavam-se, como constantes características das terras, valores mais ou menos arbitrários, visto que, antigamente, não se atribuia a devida importância à sua determinação experimental. Esta deficiência, quanto ao conhecimento nítido daquelas constantes, fazia-se sentir sobremaneira, tanto mais que a técnica das construções evoluia constantemente. A fim de compensar as condições incertas em que os cálculos se efectuavam, adoptavam-se normalmente coeficientes de segurança, que tinham por missão excluir todos os riscos da futura construção. Este método, em si pouco económico, não conseguia, no entanto, evitar que, em vários casos, se dessem desastres e prejuízos, devidos ùnicamente à opinião antiquada que regia os problemas elementares das terras.

O mérito de ter dado início a uma nova evolução pertence ao famoso cientista Prof. Karl v. Terzäghi, o qual, há já uns vinte anos, durante a sua actividade na Universidade de Massachusetts (U. S. A.) e mais tarde na Escola Superior Técnica de Viena, criou a nova ciência denominada «Mecânica do Solo».

Baseado nos resultados e estudos daquele cientista, o presente trabalho foca um problema especial: o atrito e a coesão das terras e a determinação experimental das respectivas forças.

Depois de uma curta exposição do assunto e dos conhecimentos teóricos que ao mesmo se referem, segue a descrição do novo método para a determinação do atrito interior do maciço de terras e a marcha dos ensaios efectuados Os mais importantes e característicos resultados, serão igualmente indicados.

I — Generalidades

Como se sabe, um deslocamento de terreno é motivado pela quebra das condições estáticas existentes anteriormente.

A força que existe no interior das partículas e as mantém reunidas, opondo-se assim à sua possível separação, denomina-se *força de atrito interior ou interno.*

Para determinar esta força, utilizando uma amostra de um terreno, estão de há muitos anos construídos aparelhos adequados para ensaios, os quais tentavam imitar o que se passava na Natureza.

O ensaio consistia, como nos aparelhos mais modernos, no seguinte: Dentro de uma amostra de terreno limitada lateralmente e carregada verticalmente criava-se uma superfície ou uma zona de escorregamento que dividia a amostra em duas partes. Determinava-se a força que se opunha àquele escorregamento dos dois volumes um sobre o outro.

Sem entrar numa descrição detalhada dos diferentes aparelhos e dos métodos de ensaio, pode dizer-se que até hoje ainda se não tinha conseguido construir um aparelho assaz perfeito que levasse a atingir resultados absolutamente exactos. Este facto prova quantas são as dificuldades entre as quais figura, como primeira, a desproporção de «Escala» que existe entre a Natureza e as diminutas proporções dos aparelhos imitadores das suas leis.

No entanto aqui se indica um novo método de trabalho e bem assim um novo aparelho de ensaio, que se comprovou experimentalmente ser adequado para a determinação da resistência interior tanto das terras com coesão como também daquelas que a não possuem, tendo sido controlados os resultados por outros métodos de ensaio utilizando aparelhos de grandes proporções.

II — Descrição do aparelho

A instalação baseia-se no princípio do movimento de escorregamento circular. A composição do aparelho é a seguinte, Fig. 1, I e 1, II.

A amostra de terreno (2) é colocada dentro dum tubo cilíndrico de ensaio (1); no fundo encontra-se um sistema de varetas de aço radiais (2), uma membrana de borracha (3) e uma placa de fundo, ou base, a qual se liga ao rebordo inferior do tubo cilíndrico por meio de parafusos.

A superfície desta placa de fundo é cavada ao torno (4) sendo essa concavidade destinada a ser cheia de água.

Esta água está separada da amostra do terreno (8) pela membrana de borracha que assim desempenha o papel de vedante (3).

O cilindro de ensaio é fechado superiormente por uma tampa apropriada (6) que tem na face inferior (que contacta com o terreno) um sistema de varetas de aço radiais (7), igual ao que existe no fundo (2).

Ao carregar a tampa com uma carga P as varetas superiores e inferiores penetram na amostra de terreno a ensaiar.

A marcha do ensaio é agora a seguinte: O cilindro contendo a amostra de terreno é posto a rodar por intermédio dum sistema adequado não indicado na figura. Entretanto a tampa mantém-se fixa por meio dum outro sistema, havendo possibilidade de medir a força que se opõe à sua rotação.

Em virtude dos dois sistemas de varetas penetrarem na amostra de terreno girando um com o cilindro e mantendo-se o outro fixo à tampa, cria-se uma superfície de escorregamento.

O binário (10) que imobiliza a tampa superior actuará nos extremos duma régua (braço), e esta tem a meio uma mola especial Z que transmite a sua deformação a um pêndulo (9) por meio de braços articulados.

A deslocação do pêndulo motivada pela força da mola (Z) pode ser medida numa escala apropriada sobre um quadrante (5), graduado com os diferentes valores das tensões da mola (Z).

Note-se que este sistema de ensaio se refere a amostras arenosas; no caso de ensaios com amostras plásticas e argilosas aplica-se superiormente uma tampa formada dum material poroso (pedra porosa) a fim de permitir a saída da água que a amostra contém e que tende a subir pelo efeito da compressão.

Determinação das forças

O valor do esforço tangencial S (resistência ao escorregamento) que actua na

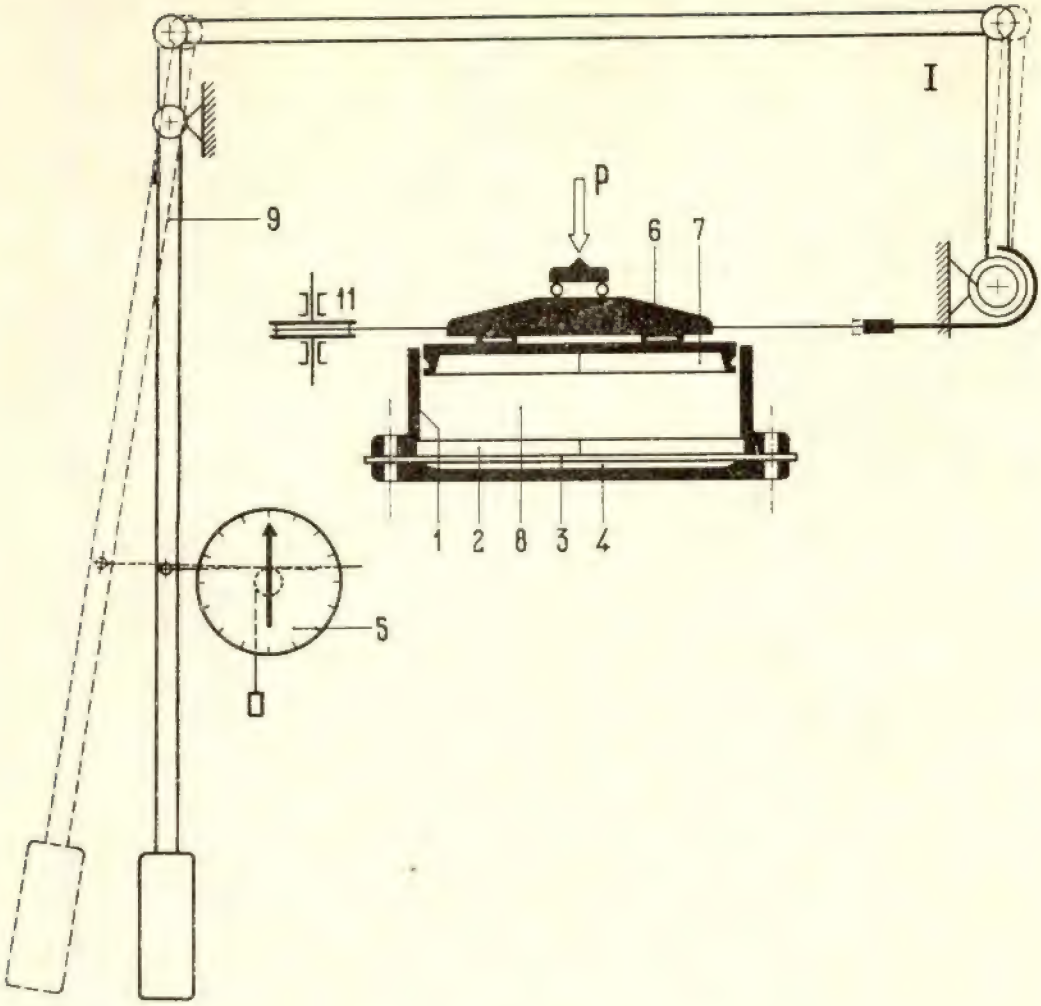


Fig. 1, I

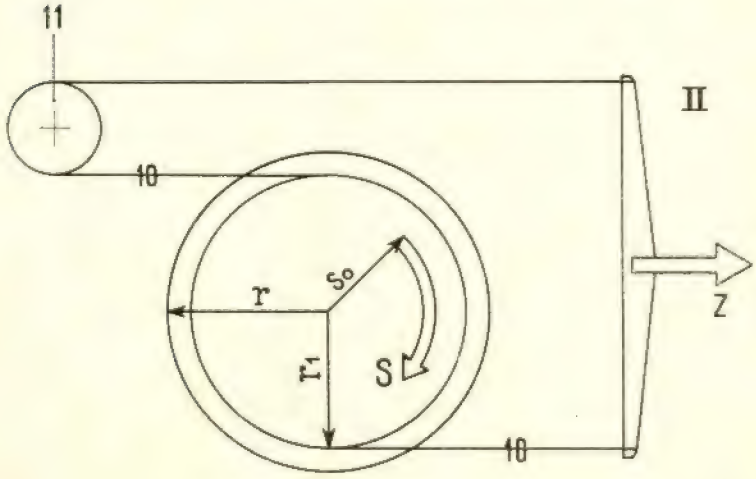


Fig. 1, II

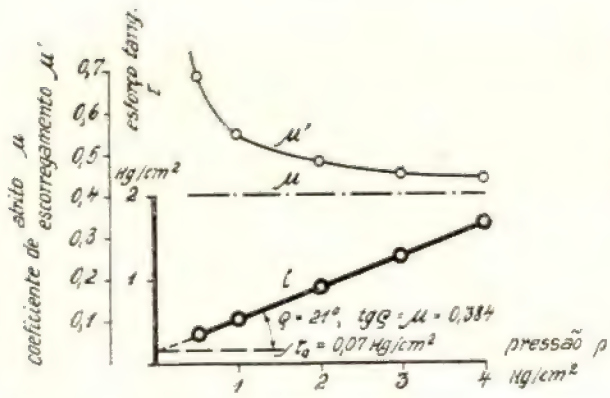


Fig. 2 — Curva característica dum ensaio com argila

superfície de atrito, a qual tem o raio da tampa r, determina-se pela medição da força Z.

Assim:

$M_s = Z.\ r_1$ | r_1 — metade do braço do binário imobilizador; M_s — momento da rotação devido à força S

A força S resultante do todas as forças tangenciais elementares que existem em toda a superfície avalia-se quando é conhecido s_o.

$$S.\ s_o = M_s = Z.\ r_1$$

donde

$$S = \frac{Z.\ r_1}{s_o}$$

e

$$s_o = \frac{2}{3}\ r$$

sendo r o raio da superfície de atrito.

O valor de s_o deduz-se da condição do momento estático de força resultante de S ser igual à soma dos momentos estáticos das forças particulares elementares dos diferentes elementos de superfície

A integração a toda a superfície só conduz a um resultado exacto quanto a tensão normal, e por conseguinte a tensão tangencial, estão distribuídas em toda a superfície dum modo uniforme.

Verificou-se que esta condição não podia ser absolutamente satisfeita enquanto a placa de fundo ficasse indeformável, pois que assim, resultam tensões desiguais e incertas.

Para tal evitar, aplica-se um fundo deformável e elástico, constituído por uma membrana de borracha, que transmite à água, que se encontra no cavado do fundo, a respectiva pressão normal, conseguindo-se fazer com que a reacção unitária seja a mesma em qualquer ponto da superfície.

III — Marcha do ensaio

a) *Descrição geral. Definições*

O valor da resistência de escorregamento interior dum terreno indica-se por um número característico, ou melhor, por uma curva característica. Este número característico chama-se *coeficiente de atrito*. Ele representa a relação entre a força tangencial τ e normal p e caracteriza a qualidade de terreno duma forma absoluta se o seu valor é constante, não o caracterizando portanto se o terreno tiver uma certa coesão. Num tal caso, a relação entre a força tangencial e a força normal, tem de ser determinada para um escalão de cargas diferentes, pois que a linha obtida deixa de ser rectilínea e horizontal; o resultado pode ser patenteado por curvas conforme se indica na figura 2.

O diagrama representa a linha da força tangencial τ duma argila muito gorda. Os pontos singulares desta linha determinam-se por ensaios de atrito para diferentes pressões; estes pontos encontram-se, no ensaio normal, aproximadamente numa linha recta segundo a expressão $\tau = \tau_o + \mu p$. A distância τ_o marcada no eixo das ordenadas (representativo da força tangencial) indica o valor da coesão.

O esforço tangencial que cresce segundo uma linha recta conforme p aumenta, chama-se atrito $(\tau - \tau_o)$.

É necessário portanto fazer a distinção entre a relação $\left(\frac{\tau - \tau_o}{p}\right)$ que é constante como dissemos e se chama *coeficiente de atrito* e a relação $\frac{\tau}{p}$ na qual está incluída a coesão, relação esta que, como vemos, é dependente do valor da coesão, podendo variar bastante e denominada *coeficiente de escorregamento*.

b) *Ensaio normal*

As indicações seguintes relativas à marcha dum ensaio normal, baseiam-se num grande número de ensaios e estão apontados na indicação dos resultados nos capítulos IV e V.

O ensaio normal é caracterizado pelas seguintes condições:

A amostra de terreno é introduzida no cilindro de ensaio; fecha-se este com a tampa e carrega se com a primeira carga P; depois de colocada esta carga e atingido o estado de equilíbrio dentro da amostra, começa-se o ensaio para a determinação do atrito.

A força tangencial que aparece segundo a superfície de escorregamento determina-se conforme o método indicado no capítulo II. Para a sua determinação toma-se o valor máximo que aparece no ensaio de escorregamento segundo uma superfície, depois de uma certa e suficiente rotação.

Neste caso é preciso ter em atenção o seguinte: A areia sem coesão não deve receber uma consolidação por efeito de vibrações, pancadas fortes, etc., além da que corresponde ao seu estado normal, num ensaio normal. Por isso deve deitar-se livremente a areia no cilindro de ensaio e bater ligeiramente este. Coloca-se a tampa e carrega-se com a carga P.

Depois de efectuado o ensaio do atrito e determinada a força tangencial correspondente àquela carga admite-se a repetição do ensaio de atrito com a mesma amostra com carga de valor superior (e crescentes) à empregada no primeiro ensaio (escalão de cargas).

Constatava-se sob as condições indicadas, que não há uma diferença ou influência na determinação dos pontos máximos da força tangencial se todos esses pontos tivessem sido determinados por um só ensaio de atrito com a mesma amostra de terreno e cargas crescentes, ou se para cada aumento de carga se tivesse efectuado uma renovação da amostra.

Uma série de ensaios com a mesma amostra para valores de carga cada vez maiores traz como consequência única a diminuição do percurso necessário para atingir o valor máximo da força tangencial.

Uma modificação das condições apontadas para o ensaio efectuado, como por exemplo uma consolidação prévia da amostra, ou a sua sujeição a cargas e descargas consecutivas origina resultados diferentes, a que teremos ocasião de fazer referência no capítulo IV.

Os terrenos com coesão, como por exemplo o barro vermelho, argila, etc., exigem uma preparação prévia, a fim de se conseguir uma consistência que é necessária a um ensaio normal.

Faz-se agora referência a amostras de terreno que já perderam a sua consistência natural (por efeito de transporte, cargas ou descargas, etc.). Estas amostras aparecem na maioria dos casos com o aspecto solto e em pedaços ou torrões e parcialmente secas; é preciso, antes de iniciar o ensaio, transformá-las numa pasta mole e plástica por amassamento com água, a fim de se conseguir mais tarde a consistência e compacidade correspondente a uma certa carga.

A diferença, quanto ao método de ensaio do atrito, entre amostras plásticas e amostras arenosas, consiste nas diferentes consequências de carga.

A compressão dum terreno arenoso motivada por uma carga sobre ele colocada, obtém-se poucos momentos depois da sua aplicação. Certos movimentos pequeníssimos que se podem constatar durante as horas seguintes à colocação ou aplicação da carga observando-se uma diminuta compressão da areia, não influem de forma sensível no valor final do ensaio. Também a percentagem de água não tem grande importância nas características mecânicas da areia grossa. Por outro lado é um factor importante e decisivo nos terrenos argilosos constituídos, como o são, por partículas pequeníssimas.

Para facilitar a compreensão dos ensaios em terrenos argilosos, apresenta-se a seguinte exposição: Se um terreno plástico cujos vazios contêm água, está sobre-carregado, isto é, se a sua carga primitiva ou natural (que já existia nele) foi aumentada sùbitamente, sofre, tal como para os terrenos arenosos, uma modificação do seu volume.

Esta modificação resulta em grande parte da diminuição do volume dos seus vazios e em pequena escala das deformações das partículas que o compõem.

A diminuição de volume dos vazios está, num terreno plástico, condicionada à saída de água destes. Enquanto que nos terrenos arenosos o processo da ressumação da água termina pouco depois da aplicação da carga, nos terrenos argilosos, pelo contrário, há um atrazo nesta saída da água por efeito da sua pouca permeabilidade.

Portanto, quando da aplicação duma carga a um terreno argiloso surge na água dos vazios uma pressão que vai diminuindo do interior para a superfície do terreno, onde é nula. Só depois de desaparecida esta diferença de pressões, ou seja quando terminada a saída da água, é que se atinge o equilíbrio que corresponde ao efeito dessa carga. O ensaio, que deve ser efectuado neste momento de equilíbrio de tensões, dá-nos o valor característico da força tangencial ou o respectivo coeficiente de escorregamento.

Para determinar os pontos da linha τ (força tangencial) têm de ser feitos diferentes ensaios de atrito para mais valores de carga. Entretanto é preciso considerar que não é de admitir num ensaio normal com terrenos plásticos a repetição dos ensaios com cargas cada vez maiores usando a mesma amostra do terreno; aqui, ao contrário do que dissemos para os terrenos arenosos, um ensaio influi de forma muito sensível nos ensaios seguintes se se empregar a mesma amostra plástica pois que o ensaio antecedente já tinha completamente modificado a relação entre as forças tangencial e vertical.

No caso de se tratar de uma amostra que foi colhida de um terreno ainda não sujeito a modificações ou movimentos (estado natural ou primitivo), as indicações para a efectivação do ensaio são agora diferentes das anteriores. Esta amostra deve ser cautelosamente trabalhada de forma a ficar com as dimensões interiores exactas do cilindro de ensaio. Será depois introduzida neste e sobre ela faz-se agora incidir o valor da sua carga primitiva, ou seja a carga a que a amostra estava sujeita quando na natureza.

Os valores da resistência da amostra do estado primitivo divergem bastante dos de uma amostra sujeita a alterações (por exemplo pela amassadura) na qual nunca se lhe consegue restituir completamente o estado de consistência natural ou primitivo.

IV — Resultados de ensaios com areia

Resistência ao escorregamento da areia no estado solto e no estado compacto

Os ensaios efectuados mostraram que o coeficiente de atrito da areia oscila entre 0,6 e 0,7.

Ensaios efectuados com grãos de areia de diâmetros diferentes, não deixaram constatar uma lei certa.

Parece que o coeficiente de atrito da areia dependia menos do diâmetro dos grãos do que da sua natureza mineralógica.

Seguidamente se tratará do estudo dum outro factor de influência da compacidade da areia.

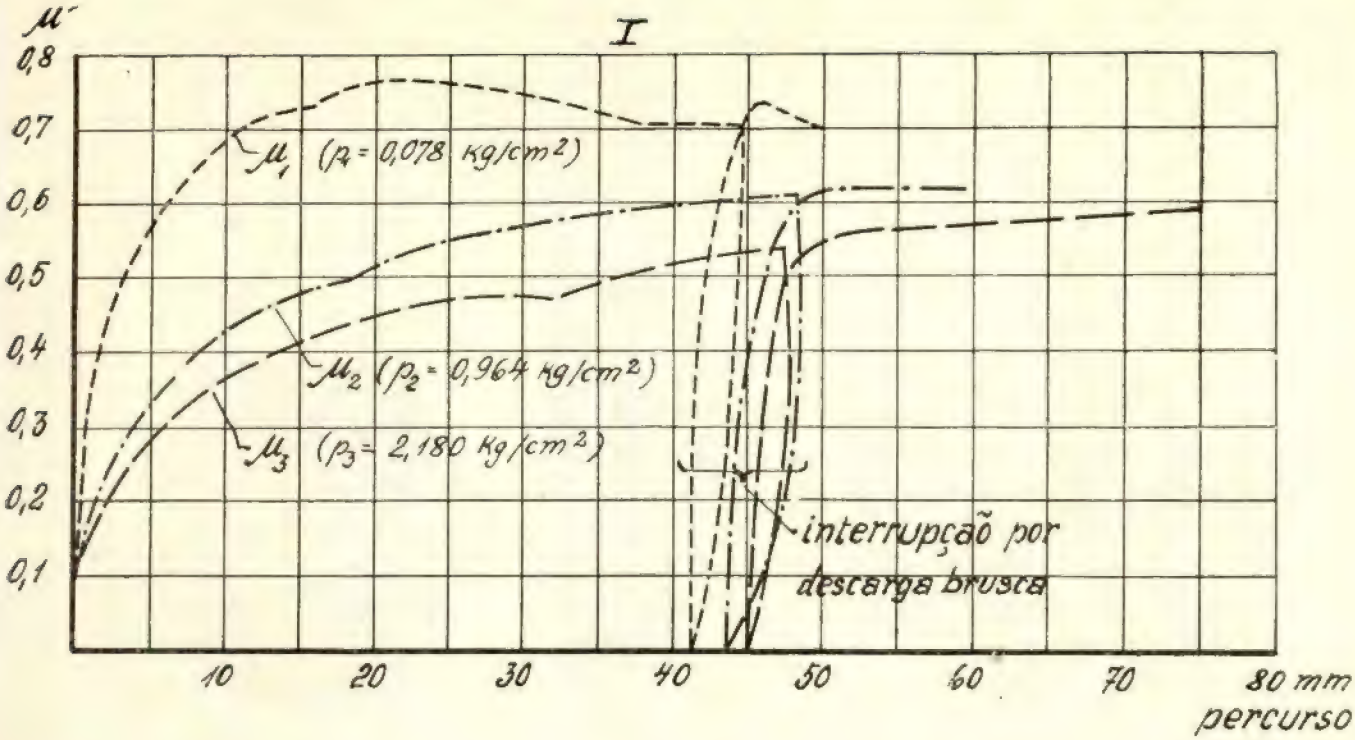
Para controlar os resultados dos ensaios realizados no aparelho anteriormente descrito, animado de movimento circular de escorregamento, efectuaram-se ensaios noutro aparelho especial mas animado de movimento linear, tendo a placa de varetas a superfície de 1^{m2}, podendo ser carregada com 40 toneladas, e deslocando-se sobre uma camada de areia de 20 cm de espessura.

A resistência de escorregamento foi medida em função do caminho percorrido. O resultado dos ensaios está indicado na figura 3 — caso I. A areia foi renovada sempre que se aumentava o valor da carga, de forma que para cada carga foi efectuado um ensaio.

Esta figura 3 — caso I, representa o resultado dos ensaios para o caso dum material solto; a figura 3 — caso II, refere-se ao caso dum material no estado mais compacto.

No primeiro caso, a areia seca foi deitada naturalmente, carregada com a carga do ensaio; no segundo caso a areia foi deitada húmida e batida por apiloamento, tornando-se assim mais compacta.

As curvas «percurso-força», mostram para o caso dum material solto, uma subida



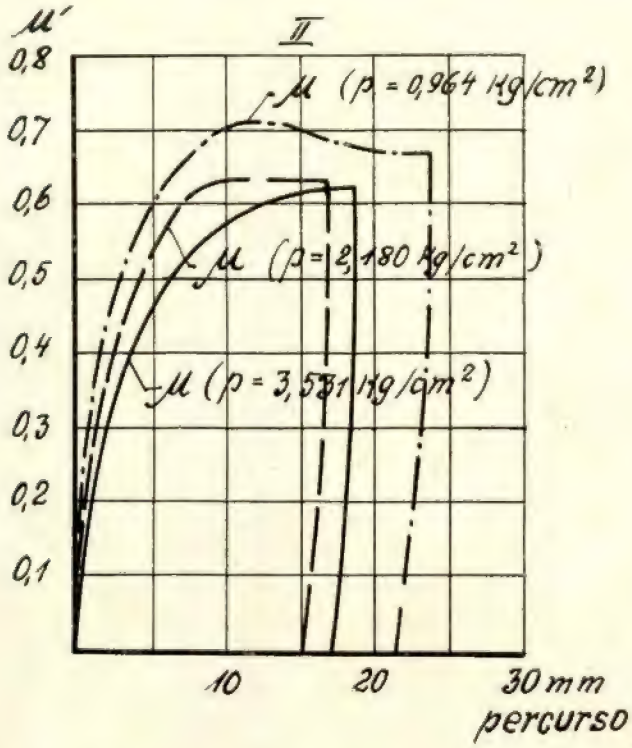


Fig. 3, I (II) — Coeficiente de escorregamento da areia em função do caminho percorrido no estado solto (compacto)

pouco acentuada. Não se chega logo a verificar um valor máximo especialmente nos ensaios com maiores cargas, em virtude da resistência ao escorregamento ir crescendo pouco a pouco aumentando a compacidade do material com o movimento contínuo e

aproximando-se do valor máximo no caso II — fig. 3 ou seja do ensaio em que o material já se encontrava compacto desde o início.

No caso de um material mais compacto, as curvas «percurso-força» sobem muito ràpidamente verificando-se um valor máximo, mantendo-se a força que representa a resistência de escorregamento, quase constante.

Verificou-se até, que para as cargas menores a curva «percurso-força» depois de atingir o máximo, desceu um pouco, e provàvelmente como consequência do movimento de escorregamento ter tornado mais solto o material que se encontrava na zona do escorregamento.

Na figura 3, III, a força tangencial e o coeficiente de escorregamento estão indicados para os dois grupos de ensaio. O resultado baseia-se sempre no máximo da curva.

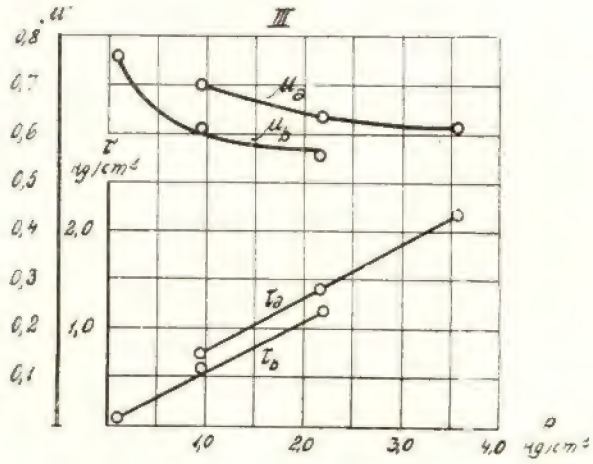


Fig. 3, III — Coeficiente de escorregamento de areia $\mu_{a,b}$ e força tangencial $\tau_{a,b}$ em função de carga p.

Como se verifica especialmente na consistência mais solta, o coeficiente de escorregamento é muito variável e desce na «zona ou escalão» dos diferentes graus de carga, de 0,70 a 0,57. O coeficiente de escorregamento para a consistência compacta desce de 0,70 a 0,62.

É provável que o grau de compacidade das areias na natureza (estado primitivo) seja maior em virtude do tempo e das condições climatéricas a que estiverem sujeitas, elementos estes que se não podem imitar num ensaio por simples apiloamento. Por isso pode-se tomar como verdadeiro, que o valor máximo do coeficiente de escorregamento se verificará na Natureza depois de um percurso, mais pequeno do que o das curvas.

Embora este percurso até se atingir o valor máximo do coeficiente de escorregamento seja menor que o percurso do ensaio laboratorial, é no entanto grande, em relação ao deslocamento máximo que uma construção pode ter sem sofrer prejuízos; quer dizer, que o máximo do valor, apenas se verifica após um certo movimento de escorregamento dos respectivos maciços ou suportes, movimento este que já não é admissível em muitos casos.

Em maior escala esta tese se verifica para um terreno solto, como por exemplo no material que se coloca no enchimento da zona logo atrás dos muros de suporte e em aterros com taludes, como os das estradas, caminhos de ferro, etc., onde o valor máximo do coeficiente de escorregamento não pode ser considerado, visto que não é atingido dentro dum limite admissível da deslocação.

V — Resultados de ensaios com terrenos plásticos (coersíveis)

a) *A resistência estática e hidrodinâmica de escorregamento.*

A *resistência estática de escorregamento* de um terreno é a oposição à deslocação segundo uma superfície, na hipótese de uma pressão vertical actuar com o seu valor total nos pontos de contacto das partículas.

A *resistência hidrodinâmica de escorregamento* é igualmente a oposição à separação, segundo uma superfície ou uma zona, mas com a diferença de que a pressão que está actuando num certo terreno, se distribui em parte sobre as partículas e em parte sobre a água que se encontra sob pressão nos vazios, conforme as circunstâncias locais.

Uma sobrepressão na água surge logo que se dá um aumento das forças exteriores actuantes, tendo como consequência a diminuição de volume dos vazios.

Se a saída da água dos vazios, pelo efeito da acção duma carga ou aumento de carga, se faz sem impedimento no mesmo tempo em que a carga actua ou vai aumentando, então não há sobrepressão; porém, se a saída da água se não dá assim, em consequência de haver uma certa impermeabilidade do terreno, como é vulgar em todos os terrenos plásticos, haverá uma diferença de pressão na água, entre a dos vazios interiores e a dos que se encontram superficialmente, diferença esta que se vem a compensar decorrido algum tempo.

Quanto maior é a parcela de pressão que se distribui sobre a água dos vazios, tanto menor é a resistência de escorregamento do terreno.

O ensaio normal com terrenos plásticos, que se faz apenas depois de efectuado o equilíbrio, está descrito no capítulo III - b, representando a chamada resistência estática de escorregamento. Esta resistência estática duma série de amostras de terrenos plásticos indica-se na tabela da página 198. As amostras desta série de valores já não se encontram no estado de «colheita natural», mas sim, foram prèviamente transformadas em pasta macia-plástica por uma amassadura com o lançamento de água, pouco a pouco.

A figura 4 representa como exemplo, a curva da força tangencial de uma argila

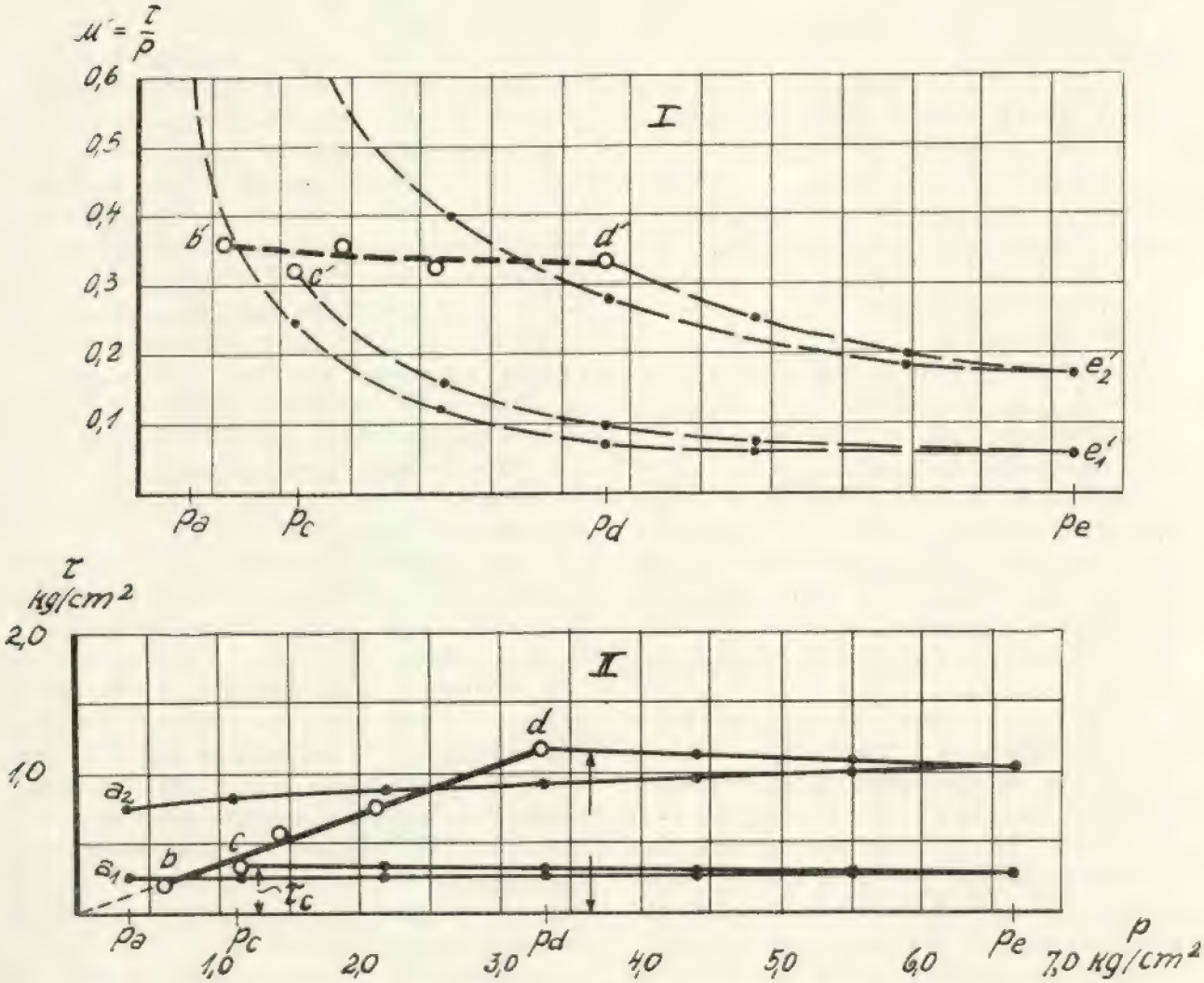


Fig. 4 — Ensaios efectuados com argila, mostrando as curvas características da resistência estática e da resistência hidrodinâmica.

I — Coeficiente de escorregamento II — Força tangencial

que foi colhida dum terreno onde se tinha verificado um grande escorregamento (talude de C. Ferro).

A resistência de escorregamento deste terreno foi fixada por uma série de cinco ensaios com cargas diferentes e amostras novamente preparadas para cada ensaio.

Os pontos de *b* a *d* representam os valores da força tangencial para as cargas unitárias p_b e p_d. Segundo estes ensaios a força tangencial aumenta linearmente.

Na hipótese desta linearidade se prolongar para a esquerda de *a* isto é, para valores das cargas p menores que a carga p_a, vemos que a linha em questão interceptava o eixo das ordenadas num ponto que, correspondendo ao valor zero, nos mostra assim a existência duma força tangencial, chamada *coesão*.

No caso presente a coesão tem por valor $\tau_0 = 0{,}025$ kg/cm²; o ângulo de atrito é $\varrho = 18^0$ e o coeficiente de atrito $\mu = \text{tg}\,\varrho = 0{,}323$.

Conforme a explicação dada para o ensaio normal com terrenos plásticos — cap. III, b — a amostra antes do ensaio encontrava-se no estado macio-plástico sem ar nos seus vazios.

A quantidade de água dos vazios no momento de ensaio correspondia ao estado de equilíbrio para a carga actuante.

A resistência de escorregamento hidrodinâmica não pode ser fixada como o é a resistência estática, por um certo coeficiente; pelo contrário, aquela resistência hidrodinâmica pode ter valores muito diferentes que dependem das condições e manipulações antes e durante a actuação da carga de ensaio.

Como exemplo, descreve-se um ensaio que foi executado após a fixação da resistência estática da citada argila: Depois daquela argila ser sujeita à carga p^c — figura 4 - II — e depois de ser atingida a sua deformação correspondente, quer dizer, depois de se dar a compensação das tensões hidrodinâmicas, foi executado o ensaio de atrito normal, que forneceu o valor estático τ_c da linha das forças transversais (ponto c da linha b-d correspondente à carga p_c). Sem interromper o ensaio (processo de escorregamento) foi então aumentada a carga de p_c a p_e num ritmo de 1 kg/cm²/minuto.

Na marcha deste ensaio verificou-se que a força transversal τ_c não aumentava (linha c-e_1); este facto mostra que não aumentando a resistência do atrito também evidentemente não haveria um aumento da pressão nos pontos de contacto das partículas do terreno da amostra, mas sim que o aumento da carga de p_c a p_e foi completamente absorvido pela água, a qual, em consequência da velocidade com que aumentava a carga e devido à pouca permeabilidade da argila, não podia sair no mesmo ritmo.

Por outro lado, se o aumento da carga de p_c a p_e fosse prolongado a um maior prazo, de forma que a água dos vazios, supérflua, pudesse sair pelo menos parcialmente, as partículas maciças da amostra receberiam a devida parte do aumento da carga.

A força transversal na altura do ensaio, feito sob a carga p_e, atingiria então um valor que seria maior do que τ_c. Como se verifica, a resistência hidrodinâmica de escorregamento dum terreno plástico que se encontre sob a acção de uma carga inicial p_c, carga esta que vai aumentando até p_e, pode atingir quaisquer valores compreendidos entre a resistência estática correspondente a p_c e o máximo valor, que então representa a resistência estática para a carga p_e, valores estes que dependem da velocidade e do aumento da carga.

Esta marcha de ensaio anteriormente descrita foi repetida da mesma maneira para uma carga inicial p_d com um aumento de valor até p_e.

A resistência hidrodinâmica de escorregamento mostra neste caso e quando do aumento do valor da carga, uma leve descida da linha d-e_2 referente ao ponto de partida *d*. Esta diminuição da resistência de escorregamento devia ser atribuída a partículas de água que se iam reunindo na zona de escorregamento, diminuindo o valor do atrito numa deslocação prolongada.

O ensaio de escorregamento foi depois prolongado e a amostra do terreno foi mais tarde e no mesmo ritmo, descarregada, isto é, o valor da carga foi pouco a pouco dimi-

nuindo com o ritmo com que tinha sido anteriormente carregada.

Então a força transversal descreveu a linha e_1 - a_1 (respectivamente e_2 - a_2 quando na diminuição da carga de p_e a p_a).

Verifica-se pela forma das curvas que nem um aumento brusco das cargas origina num terreno plástico um aumento linear da resistência de escorregamento, nem uma diminuição brusca origina uma diminuição linear de escorregamento.

Este fenómeno, estando fora da lei do atrito, é designado por resistência hidrodinâmica de escorregamento, conforme as explicações anteriormente descritas.

amostra do terreno foi transformada, antes do ensaio e por um processo de amassadura com água, numa massa homogénea e plástica, conforme a indicação do ensaio normal (vidé pág. 187). Entretanto a força transversal de uma amostra de tal maneira trabalhada, pode ser muito diferente daquela colhida no estado natural. Como exemplos, são patenteados os resultados que foram avaliados com uma argila arenosa (argila *b*) e com uma argila mais gorda (argila *a*).

As linhas τ_a (fig, 5, I e II) representam a força transversal das amostras anteriormente preparadas por amassadura, enquanto que as linhas τ_b foram determinadas por

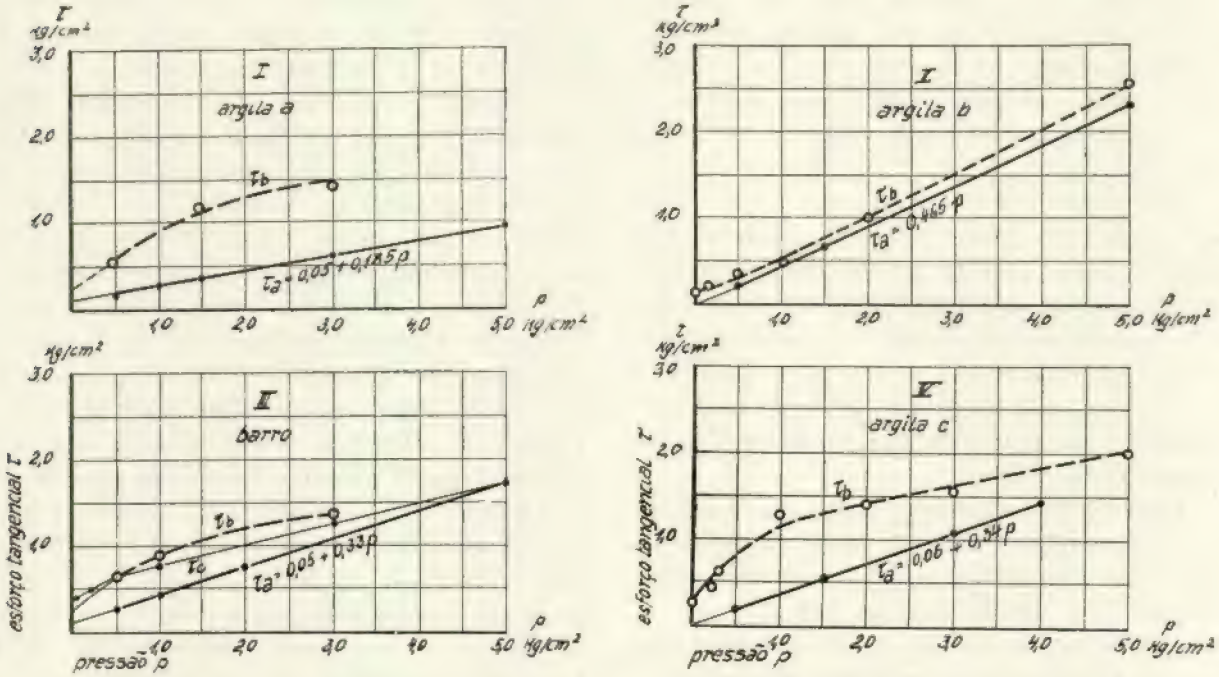


Fig. 5 — Resistência de escorregamento de vários terrenos plásticos no estado natural (primitivo) τ_b e no estado trabalhado (manipulado) τ_a.

b) *Resistência de escorregamento num terreno no estado natural (primitivo) e no estado trabalhado (manipulado)*

Os capítulos anteriores ocuparam-se de ensaios tendentes a verificar a resistência de escorregamento do terreno, especialmente sob o ponto de vista de uma mudança das condições de estabilidade (por exemplo, aumento ou diminuição de uma sobrecarga em relação ao estado originário). Cada

ensaios com amostras no estado natural primitivo. Este estado, neste caso, é o de uma amostra que foi colhida da natureza e com dimensões suficientes a fim de se poder dela obter um sólido homogéneo e não danificado o qual se adoptava perfeitamente ao molde de ensaio.

As linhas características mostram que a força transversal de uma amostra intacta τ_b segue um percurso que, na figura 5 (I, II, III e IV) está por cima da linha represen-

tativa da força transversal τ_a referente a uma amostra manipulada. O valor da diferença é muito variável.

As linhas τ_a e τ_b da argila *b* andam muito próximas, enquanto que as da argila *a* se afastam muito. Aquela diferença resulta do diferente grau de compacidade da amostra natural, o que se pode ver «à priori» quando da avaliação da quantidade de água duma amostra. Esta quantidade de água da argila *b* no estado natural foi, na altura da colheita, de 46 % do seu peso; esta percentagem relativamente grande é proveniente da pouca profundidade a que foi recolhida a amostra, pois que o terreno, à superfície do solo, tem mais capacidade absorvente em virtude da sua pressão interna ser menor que em profundidade.

Em contrapartida a percentagem de água da argila *a* só foi de 20 % do seu peso e correspondia a uma carga natural oscilando por 10 kg/cm².

Esta argila foi colhida no sopé duma escavação profunda e tinha ainda a sua compacidade resultante da carga natural anteriormente existente antes da escavação.

As amostras trabalhadas do mesmo terreno (linha τ_a) tinham 48 % em peso (argila *b*) e 35 % em peso (argila *a*) de água antes da actuação da primeira carga do escalão de cargas do ensaio.

A pequena diferença entre o valor da força transversal das amostras trabalhadas de argila *b* e da amostra intacta da mesma argila, deve atribuir-se ao facto de que as amostras de ambas as séries de ensaios se encontravam antes da actuação da primeira carga, no estado muito plástico com relativamente grande percentagem de água e com um grau de compacidade pouco diferente um do outro.

Na ocasião dos ensaios com escalões de cargas crescentes podia-se verificar um aumento quase igual do valor da compacidade nas duas séries de amostras. Pelo contrário, nos ensaios da argila *a* as condições eram diferentes, pois que as amostras no estado trabalhado tinham uma consistência macio-plástica antes da colocação da primeira carga, carga esta que naturalmente origina a saída de uma certa percentagem de água dos vazios e o aumento da compacidade. Entretanto as amostras no estado natural já tinham um certo grau de compacidade que pela acção da carga do ensaio, já não aumentava muito.

Os mesmos ensaios comparativos foram feitos com barro amarelo muito gordo e com uma argila cinzenta que foi recolhida do subsolo da ponte sobre o «Pequeno Belt» (barro amarelo e argila *c*, figura 5, III e IV).

O ensaio normal (linha τ_a) do barro (figura 5, III) foi completada por um ensaio de descarga (linha τ_c). Também neste caso cada ponto do ensaio foi determinado com uma amostra novamente manipulada sendo o valor da última carga $p = 5{,}0$ kg/cm². Depois de completo efeito desta carga fez-se a diminuição da mesma, até se chegar à carga prevista para fazer o ensaio de atrito. O próprio ensaio foi efectuado só depois de passadas algumas semanas e após se ter dado a conclusão da expansão da amostra.

Nos ensaios com amostras de vários terrenos, foi em geral verificado que, quanto mais semelhantes eram as consistências das duas categorias de amostras, antes de efectuada a primeira carga, tanto mais próximas caminhavam aquelas linhas τ_a e τ_b, que respectivamente representam a força transversal da amostra trabalhada e a força transversal da amostra no estado primitivo.

Enquanto que as linhas τ_a para o estado trabalhado oferecem uma boa possibilidade de comparação de todos os terrenos plásticos em ensaios analizados pois que o estado inicial para o ensaio normal (vidé pág. 187) foi sempre o mesmo, isso não é assim para as amostras no estado natural.

A força transversal das amostras do mesmo terreno pode variar muito se as amostras foram colhidas de profundidades diferentes, tendo assim compacidades diferentes, aumentando esta com a profundidade.

Isto demonstra a grande irregularidade dos pontos de ensaio (linha τ_b) da argila *a*, pontos estes que foram determinados com amostras da mesma argila mas colhidas em profundidades diferentes, sendo a carga do ensaio igual àquela que se tinha de supor existir na respectiva profundidade da colheita.

Em referência a este facto, era justa a determinação do valor τ_b dum terreno apenas para um escalão limitado de cargas que correspondessem ao peso de terreno acima do ponto da colheita. Portanto, se foram colhidas amostras de profundidades diferentes duma sondagem, a força transversal para cada amostra no estado primitivo, devia ser avaliada ùnicamente para aquela carga que na realidade actuava na natureza, o que sempre se pode avaliar com aproximação suficiente.

Não incluídos na tese apresentada e descrita, encontram-se aqueles casos dos quais resultam outras condições para a marcha do ensaio, como por exemplo: 1) uma carga útil actua sùbitamente, 2) diminuição da carga natural como consequência da diminuição da camada acima do ponto de colheita por escavação, 3) variações (queda ou subida) de nível de água, etc., que originam alterações de carga.

VI — Exemplos de aplicação

Os resultados anteriormente citados quanto à força transversal de terrenos plásticos mostram de que maneira é preciso realizar o estudo do terreno, para os determinar.

Nos exemplos seguintes é explicado que a marcha indicada para a execução dos ensaios singulares se baseia na reconstituição dos casos que surgem frequentemente na natureza.

Procura-se a força transversal numa possível superfície de escorregamento que se supõe ser a mais desfavorável. Em primeiro lugar estudou-se o caso de terreno intacto (primitivo) — (talude de uma escavação, figura 6); em segundo lugar, o caso de um terreno solto (talude de aterro, figura 7 e 8).

A fim de não complicar o problema, supõem-se para todos os casos a mesma forma circular da superfície de escorregamento (o que não tem importância de maior no conceito deste trabalho).

Nesta superfície de escorregamento determina-se uma série de casos de cargas possíveis para os elementos m_1 e m_2 em dois pontos daquela superfície.

Para cada caso é indicada a marcha do ensaio a aplicar, para a determinação da força resistente de escorregamento. É suposto que os elementos m_1 e m_2 desde que se encontram num terreno intacto podem ser colhidos, na sondagem, no estado inalterado (primitivo, natural).

a) *Resistência estática de escorregamento de terrenos plásticos*

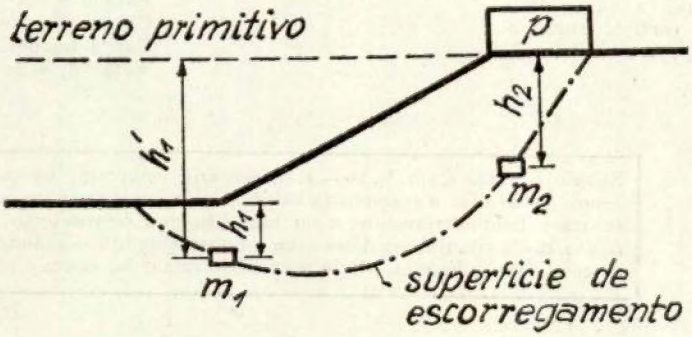
Caso 1 — Fig. 6 — **Talude de escavação**

Elemento m_1

Terreno intacto; estado inalterado.

Carga: carga primitiva (a existente antes da escavação) $p'_1 = \gamma h'_1$

Carga após a escavação $p_1 = \gamma h_1$ (*)



Elemento m_2

Terreno intacto; estado inalterado.

Carga: (antes e depois da escavação) $p_2 = \gamma h_2$

Fig. 6

Ensaio 1 (ver Cap. V, b) — A amostra intacta colhe-se da profundidade h_1; carregar com p'_1 e esperar o efeito da carga. Descarregar depois para p_1; esperar a expansão da amostra e consequente absorpção de água que é preciso ser facultada. Depois da conclusão deste processo, faz-se o ensaio de atrito (**).

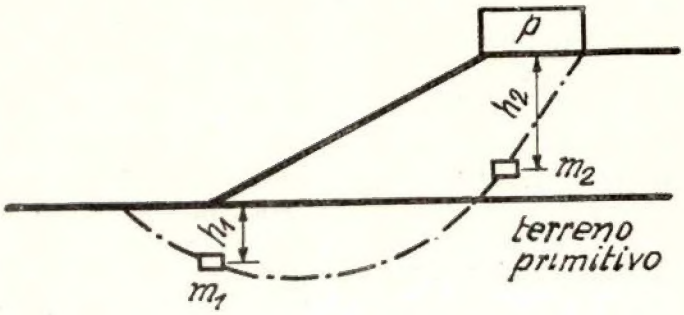
Ensaio 2 (ver Cap. V, b) — A amostra intacta colhe-se da profundidade h_2; carregar com p_2 e depois de esperar o efeito da carga p_2 procede-se ao ensaio de atrito.

Caso 2 — Fig. 7 — **Talude de aterro**

Elemento m_1

Terreno intacto; estado inalterado.

Carga: $p_1 = \gamma h_1$



Elemento m_2

Aterro com material plástico amassado e comprimido com cilindros.

Carga: $p_2 = \gamma h_2$

Fig. 7

Ensaio 3 Idêntico ao Ensaio 2

Ensaio 4 (vidé Cap. III, b) — Amostra macio-plástica e amassada, a carregar com p_2. Depois do efeito da carga, realizar o ensaio de atrito (ensaio normal) (*).

b) *Resistência hidrodinâmica de escorregamento*

Caso 3 — Fig. 7 — **Talude de aterro com sobrecarga actuando sùbitamente e temporàriamente**

Visto que a expulsão da água do terreno de aterro, em consequência da sua pouca permeabilidade não se pode dar com o mesmo ritmo da actuação da carga, é de contar com a resistência hidrodinâmica de escorregamento.

Elemento m_1

E suposto que a carga útil, como carga vertical sobre o elemento m_1, já o não atinge

Elemento m_2

Estado — vidé caso 2
Carga permanente $p_2 = \gamma h_2$
Carga temporária p
Total $p_2 + p$

Ensaio 5 (vidé Cap. V, a) — É necessário completar os ensaios 2 e 4 de modo que depois de avaliar a resistência estática de escorregamento, se deve aumentar a carga, súbita e temporàriamente, num aumento que corresponde ao valor da carga útil p. A avaliação simultânea determina a resistência hidrodinâmica de escorregamento para as condições indicadas, sendo necessário tomar em conta o ritmo do aumento da carga.

(*) Peso específico do terreno, diferente para todos os casos mencionados devido às condições a que a água está sujeita (marés, queda ou subida do nível da água, etc.).

(**) São precisos ensaios a largo prazo. As consequências da descarga podem verificar-se em função da sua expansibilidade e absorvibilidade, quer depois de pouco tempo (dias) quer depois de muito tempo (meses).

Caso 4 — **Queda ou subida do nível da água**

O aterro (caso 2) está parcialmente ou completamente submerso e a percentagem da sua água é considerada correspondente à posição de nível máximo da mesma, que consideramos como estado normal. A queda h_2 temporária traz como consequência que o peso específico do aterro que se encontra nesta zona h_2 aumenta na mesma proporção em que diminue a sobpressão anterior. Se a saída da água não se dá com o ritmo ou cadência do aumento de peso, em virtude da pequena permeabilidade do terreno, é de contar com a resistência hidrodinâmica de escorregamento.

Elemento m_1

O aumento de peso do aterro, resultante da queda do nível de água já não atinge o elemento m_1 como carga vertical.

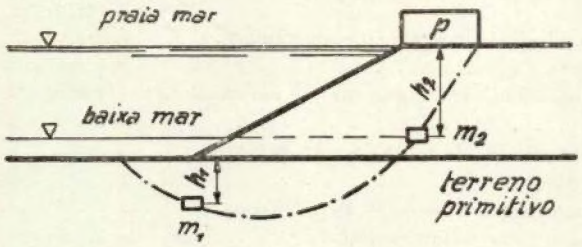


Fig. 8

Elemento m_2

Terreno solto e plástico amassado e comprimido com cilindros.
Carga para o nível de água normal é marcado por HW:

$$p_4 = h_2 (\gamma - 1)$$

Depois da queda (marcado por NW):

$$p_5 = \gamma h_2$$

Ensaio 6 (vidé Cap. V, a e Ensaio 5)

Amostra amassada e tornada macio-plástica a carregar com p_4. Depois do efeito desta, fazer o ensaio de atrito. Após a determinação da resistência estática de escorregamento é preciso aumentar a sobrecarga de p_4 a p_5 num ritmo que corresponde ao tempo em que se vai dando a queda do nível para o caso respectivo, sem interrupção da marcha do ensaio.
A determinação simultânea dá a resistência hidrodinâmica do escorregamento para as condições indicadas.

VII — Resumo de resultados de ensaio

Na tabela seguinte apresenta-se uma selecção de resultados de ensaios para diferentes terrenos e resultados obtidos em ensaios sobre o atrito entre os terrenos e corpos macios; são considerados ainda ensaios com placas de betão sobre a areia e sobre terrenos aluvionários.

Trata-se neste caso de ensaios em grande medida com placas de 1 m^2 que foram carregadas até 40 toneladas ou sejam 4 kg/cm^2.

As placas foram construídas quer sobre a cofragem de madeira (taipais) quer directamente sobre o terreno a analisar, conforme a aspereza das superfícies de fundações verticais e horizontais, respectivamente.